Упражнения по теории групп

Е. С. ЛЯПИН, А. Я. АЙЗЕНШТАТ, М. М. ЛЕСОХИН



Е. С. ЛЯПИН, А. Я. АЙЗЕНШТАТ, М. М. ЛЕСОХИН

УПРАЖНЕНИЯ
ПО
ТЕОРИИ ГРУПП

Под редакцией
Е. С. ЛЯПИНА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

Евгений Сергеевич Ляпин, Анна Яковлевна Айзенштат,
Михаил Моисеевич Лесохин

Упражнения по теории групп
М., 1967, 264 стр.

Редакторы *З. И. Боревич* и *В. В. Донченко*
Техн. редактор *А. А. Благовещенская* Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 20/XII 1966 г. Подписано к печати 5/IV 1967 г. Бумага $84 \times 108\ ^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 8,25. Условн. печ. л. 13,86. Уч.-изд. л. 14,87. Тираж 20 000 экз. Т-01869.
Цена книги 67 коп. Заказ № 737.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

2-2-3
53-67

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга имеет своей целью способствовать изучению основных исходных положений, результатов и методов современной алгебры. В ряду алгебраических дисциплин, составляющих в совокупности то, что в последнее время часто стали называть общей алгеброй (по-видимому, лучше было бы говорить: общей теорией алгебраических действий), теория групп занимает бесспорно первое место как наиболее развитая из этих дисциплин. Естественно начинать изучение современной алгебры именно с теории групп. Однако следует учитывать современное положение дел в алгебре, где теория групп представляется как раздел, близко соприкасающийся с рядом других алгебраических теорий. Что касается исходных положений даже самой теории групп, то наиболее естественно они могут быть приняты и усвоены в связи с идеями общего характера, выходящими за пределы собственно теории групп. Этими соображениями определяются рамки, ограничивающие материал данной книги. Здесь изучаются начальные разделы теории групп, излагаемые на базе общих понятий, что делает одновременно и более естественными основы самой теории групп и служит подходящим фундаментом для изучения иных алгебраических дисциплин.

Уже давно обращалось внимание на важную роль алгебры в математике. Именно в алгебре часто формируются идеи, понятия и методы, которые в дальнейшем распространяются и на другие области математики. Поэтому ознакомление с основами алгебры необходимо для математиков различных специ-

альностей. При этом начинать желательно возможно раньше с первых же курсов университетов и педагогических институтов. Однако на пути этого имеется значительное методическое препятствие. Обилие, сложность и большая общность («абстрактность») понятий крайне затрудняют овладение этим материалом для тех, кто только приступил к изучению высшей математики. Наиболее успешный путь для преодоления этой трудности заключается в следующем. Знакомясь с понятиями, надо иллюстрировать их возможно бо́льшим числом конкретных примеров, показать, как они реализуются в отдельных случаях. При этом желательно, чтобы это не было просто продемонстрировано преподавателем (или автором книги), но чтобы изучающий в известном смысле самостоятельно подошел к этому. Активная роль обучающегося является залогом полного и действенного усвоения материала.

Указанные соображения были ведущими для создания данной книги. В каждом разделе сначала в краткой форме сообщаются основные понятия. Затем приводятся примеры, конкретизирующие эти понятия. Путем последовательного выполнения ряда упражнений читатель сам приходит к доказательству ряда свойств данных понятий. Среди этих свойств встречаются такие, которые являются важными исходными теоретическими результатами в данной области, а также и менее значительные, но полезные вспомогательные свойства и, наконец, просто тренировочные упражнения.

Авторы надеются, что начинающий математик, проработавший эту книгу (полностью или частично), сможет не только запомнить и усвоить, но и творчески овладеть исходными понятиями, некоторыми результатами и методами теории групп. После этого он уже смело может приниматься как за более углубленное изучение самой теории групп, так и за ознакомление с другими направлениями современной общей алгебры.

Разумеется, успех будет увеличен, если параллельно с работой над данной книгой читатель будет иметь возможность

слушать лекции специалиста, пользоваться его советами и указаниями или использовать другие книги (список соответствующих книг, имеющихся на русском языке, приводится в конце книги). Это тем более важно, что в соответствии с направлением и характером данной книги в ней не приводится подробных разъяснений и обоснования значений вводимых понятий и получаемых результатов, не излагается история вопроса, причины возникновения тех или иных понятий. Для того чтобы познакомиться с этим, так же как и для последующего дальнейшего углубленного изучения материала, необходимо чтение специальных монографий или соответствующие лекции.

Учитывая, однако, что различные читатели могут оказаться в весьма различных условиях в отношении сказанного выше, данная книга составлена так, что при работе с ней нет непосредственной жесткой необходимости пользоваться каким-либо определенным дополнительным источником. В известном смысле она автономна. Это должно увеличить возможности ее применения. Разумеется, читатель, получивший ряд сведений из другого источника, просто пропустит соответствующие упражнения, рекомендуемые данной книгой.

Для задач, приводимых в книге, даются ответы. Для более трудных — указания, кратко намечающие путь решения. Около номеров задач, для которых приведены указания, стоит буква У. Номера упражнений, результаты которых представляют значительный теоретический интерес, сопровождаются буквой Т.

Некоторые задачи сопровождаются и примечаниями, цель которых обычно состоит в том, чтобы обратить внимание на те или иные особенности в решении или значении полученного результата, которые заслуживают внимания, но могли остаться незамеченными.

Материал разбит на главы и параграфы. Задачи соответственно нумеруются внутри каждого параграфа отдельно с

указанием номера главы и параграфа. Например, 2.3.13 означает тринадцатую задачу в третьем параграфе второй главы.

Разумеется, отдельные задачи могут оказаться близкими к задачам, приводимым в качестве упражнений в том или ином теоретическом курсе, или представлять собою те или иные доказываемые там утверждения. Каких-либо указаний в таких случаях не делается хотя бы потому, что большею частью трудно выяснить, когда и кто именно впервые предложил соответствующую задачу.

На последнем этапе работы с книгой авторы получили большое количество полезных и ценных советов от З. И. Боревича, которому выражают искреннюю благодарность.

ГЛАВА I

МНОЖЕСТВА

§ 1. Исходные понятия теории множеств

Пусть определено некоторое свойство, относительно которого про всякий предмет, который может быть рассмотрен в какой-либо математической теории, можно в принципе сказать, обладает он этим свойством или нет. Тогда все взятые вместе предметы, обладающие этим свойством, мы можем представлять себе как некий новый математический предмет, который называется *множеством,* состоящим из всех предметов, обладающих указанным свойством. Сами эти предметы называются *элементами* данного множества.

Таким образом, для задания какого-либо множества можно или формулировать то свойство, обладание которым делает какой-либо математический предмет его элементом, или указать все его элементы. (Собственно говоря, факт принадлежности каждого из элементов заданному множеству тоже можно рассматривать как некоторое свойство. Таким образом, оба подхода различны лишь по внешнему оформлению.)

Тот факт, что x является элементом множества M, записывается так: $x \in M$. В этом случае говорят также, что x входит в M, x содержится в M или что x принадлежит M.

Два множества равны, т. е. совпадают, если они состоят из одних и тех же элементов. Поэтому доказательство равенства двух множеств M и N обычно состоит из двух частей. Сначала доказывается, что для каждого $x \in M$ имеет место $x \in N$; затем что для каждого $y \in N$ имеет место $y \in M$.

Наравне с термином «множество» употребляются в том же смысле термины «совокупность» и «класс». При этом надо, однако, оговорить, что в некоторых более глубоких аксиоматических теориях делается различие между понятиями «множество» и «класс». В пределах этой книги в этом нет необходимости и никакого различия между терминами «класс» и «множество» мы делать не будем.

То, что некоторое множество M состоит из элементов $x, y, \ldots, t, \ldots$, мы будем записывать при помощи фигурных скобок:

$$M = \{x, y, \ldots, t, \ldots\}.$$

Если элементы множества обозначаются при помощи некоторых индексов, например x_α, x_β, ..., x_ξ, ..., то пишут также

$$M=\{x_\xi\} \qquad \text{или} \qquad M=\{x_\xi\}_{\xi\in\Gamma},$$

где Γ — множество всех индексов: $\Gamma=\{\alpha, \beta, \ldots, \xi, \ldots\}$.

В пределах данной книги у нас не будет необходимости делать различие между каким-либо предметом x и множеством $\{x\}$, состоящим из одного этого элемента x (одноэлементное множество), хотя в некоторых иных теориях такое различие необходимо.

Множество может состоять из конечного числа элементов (любого) или быть бесконечным. Среди множеств рассматривается также и так называемое *пустое множество*, не имеющее ни одного элемента. Мы будем обозначать пустое множество знаком $\varnothing$.

Если все элементы некоторого множества M являются одновременно элементами другого множества N, то говорят, что M есть подмножество множества N (или что M содержится в N) и пишут $M\subset N$ или $N\supset M$.

Подмножествами множества N являются, в частности, само N и пустое множество. Эти подмножества называются *несобственными*. Прочие подмножества называются *собственными* подмножествами множества N.

Непосредственно ясно, что одновременное выполнение для двух множеств условий $M\subset N$ и $N\subset M$ равносильно равенству этих множеств: $M=N$.

Для двух множеств M и M' *объединением* их (иногда говорят также *теоретико-множественной* суммой) называют множество, состоящее из всех элементов, являющихся элементами хотя бы одного из множеств M или M'. Объединение обозначается через $M\cup M'$.

Пересечением M и M' называют множество, состоящее из всех элементов, являющихся одновременно и элементами M и элементами M'. Пересечение обозначается $M\cap M'$. Если $M\cap M'=\varnothing$, то говорят также, что M и M' не пересекаются.

Пусть задана совокупность множеств:

$$\{M_\alpha, M_\beta, \ldots, M_\xi, \ldots\}=\{M_\xi\}_{\xi\in\Gamma}; \quad \Gamma=\{\alpha, \beta, \ldots, \xi, \ldots\}.$$

Объединением всех множеств M_ξ называется множество, обозначаемое через

$$M_\alpha\cup M_\beta\cup\ldots\cup M_\xi\cup\ldots$$

или $\bigcup_{\xi\in\Gamma} M_\xi$, которое состоит из всех элементов, входящих элементами хотя бы в одно из M_ξ.

Пересечение, обозначаемое через

$$M_\alpha\cap M_\beta\cap\ldots$$

или через

$$\bigcup_{\xi\in\Gamma} M_\xi,$$

есть множество, состоящее из всех элементов, являющихся одновременно элементами каждого из множеств M_ξ.

Если в множестве M заданы его подмножества M_α, M_β, ... такие, что их объединение равно M:

$$M = M_\alpha \cup M_\beta \cup \ldots,$$

и никакие два из этих подмножеств не имеют ни одного общего элемента (не пересекаются), то говорят, что M есть непересекающееся объединение множеств M_α, $M_\beta, \ldots$ Говорят также, что определено *разбиение* M на классы M_α, $M_\beta, \ldots$ Если при этом все множества M_α, $M_\beta, \ldots$ не пусты, а количество их более одного, то говорят о собственном разбиении.

Для двух множеств M и N через $M \setminus N$ обозначается множество всех тех элементов из M, которые не являются элементами из N.

Пусть даны некоторое множество M и некоторое множество индексов (т. е. элементов, которые рассматриваются только как различительные знаки)

$$\Gamma = \{\alpha, \beta, \ldots\}.$$

Каждому из индексов $\xi \in \Gamma$ сопоставлен некоторый элемент x_ξ из M. При этом некоторым различным индексам может оказаться сопоставленным один и тот же элемент из M. Тогда говорят, что $(x_\alpha, x_\beta, \ldots) = (x_\xi)_{\xi \in \Gamma}$ есть некоторое семейство элементов из M. Например, бесконечная последовательность чисел есть семейство чисел, в котором множество индексов состоит из всех натуральных чисел: 1, 2, 3, ...

Пару элементов (x, y) из некоторого множества M, взятых в определенном порядке, можно рассматривать как семейство элементов из M с множеством индексов $\{1, 2\}$ (то, что x стоит в этой паре на первом месте, означает, что x сопоставлен первому индексу 1, стоящий на втором месте y сопоставлен индексу 2).

Пусть для некоторого множества индексов $\Gamma = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ каждому индексу $\xi \in \Gamma$ сопоставлено свое множество (причем допускается, что некоторые из множеств M_α, M_β, ... или даже все они совпадают друг с другом). Декартовым произведением множеств M_α, M_β, ... называется множество всех элементов x следующей природы.

Произвольным образом каждому индексу $\xi \in \Gamma$ сопоставляется элемент $x_\xi \in M_\xi$. Это и определяет x:

$$x = (x_\xi)_{\xi \in \Gamma}, \qquad x = (x_\alpha, x_\beta, \ldots)$$
$$(x_\alpha \in M_\alpha, \ x_\beta \in M_\beta, \ldots).$$

Можно сказать, что x является семейством элементов множества $\bigcup_{\xi \in \Gamma} M_\xi$ с множеством индексов Γ (как видно, не любым семейством, а таким, что $x_\xi \in M_\xi$ для каждого $\xi \in \Gamma$). Декартово произведение множеств M_α, M_β, ... обозначается через

$$M_\alpha \times M_\beta \times \ldots \times M_\xi \ldots (\xi \in \Gamma)$$

или короче

$$\prod_{\xi \in \Gamma} \times M_\xi.$$

В случае, когда множество индексов Γ декартового произведения конечно и состоит из n элементов, обычно считают, что индексами являются числа 1, 2, ..., n. Само декартово произведение записывается тогда как $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, а элементы этого декартового произведения записывают в виде конечной последовательности

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ (где } x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n).$$

В частности, множество всевозможных последовательностей из n элементов, принадлежащих некоторому множеству M, есть не что иное, как декартово произведение $\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n \text{ раз}}$.

1.1.1. Выяснить, элементами каких из нижеследующих множеств являются следующие числа:

$$0,\ 1,\ \frac{3}{5},\ \sqrt{2},\ -2,\ \pi,\ \frac{1}{7},\ i,\ -i,\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ 2+i.$$

Множества:
M_1 — множество всех натуральных чисел;
M_2 — множество всех целых чисел;
M_3 — множество всех рациональных чисел;
M_4 — множество всех положительных вещественных чисел;
M_5 — множество всех комплексных чисел z, обладающих тем свойством, что $z^2 = z$;
M_6 — множество всех таких чисел z, что $z^2 \neq z$.

1.1.2. Какие из матриц:

$$x=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$u=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

являются элементами множества всех матриц, определитель которых равен 1?

1.1.3. Сколько элементов содержит множество всех корней уравнения

$$x^5 - 2x^3 + x = 0?$$

1.1.4. Для множеств M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 задачи 1.1.1 выяснить, какие из них будут подмножествами других?

1.1.5. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — два алгебраических полинома. Доказать, что множество корней полинома $F(x)=f(x)\varphi(x)$ есть объединение множества корней полинома $f(x)$ и множества корней полинома $\varphi(x)$.

1.1.6. Найти пересечение множества всех целых неотрицательных чисел и множества всех целых неположительных чисел.

1.1.7. Для всякого вещественного числа ρ обозначим через M_ρ множество всех вещественных чисел, бо́льших ρ. Найти: 1) $\bigcup\limits_\rho M_\rho$; 2) $\bigcap\limits_\rho M_\rho$ (объединение и пересечение берутся по всем вещественным числам ρ).

1.1.8. Пусть M_n есть множество всех натуральных чисел, делящихся на натуральное число n. Найти:

1) $\bigcup\limits_n M_n$ (объединение по всем натуральным n);

2) $\bigcap\limits_n M_n$ (пересечение по всем натуральным n);

3) $M_n \bigcap M_m$;

4) $\bigcup\limits_p M_p$ (объединение по всем простым числам $p=2, 3, 5, 7, \ldots$).

1.1.9.Т. Доказать, что для произвольных множеств M, N и S выполняются соотношения:

$$M \bigcup M = M, \quad M \bigcap M = M,$$
$$M \bigcup N = N \bigcup M, \quad M \bigcap N = N \bigcap M,$$
$$M \bigcup (N \bigcup S) = (M \bigcup N) \bigcup S,$$
$$M \bigcap (N \bigcap S) = (M \bigcap N) \bigcap S,$$
$$M \bigcap (N \bigcup S) = (M \bigcap N) \bigcup (M \bigcap S),$$
$$M \bigcup (N \bigcap S) = (M \bigcup N) \bigcap (M \bigcup S).$$

1.1.10. Найти для произвольного множества M: 1) $M \bigcup \varnothing$; 2) $M \bigcap \varnothing$.

1.1.11. Пусть M есть некоторое множество. Рассматривая его подмножества, будем для $A \subset M$ применять обозначение $\tilde{A} = M \setminus A$. Найти для $A, B \subset M$:

$$1)\ \tilde{\tilde{A}};\ 2)\ A \bigcup \tilde{A};\ 3)\ A \bigcap \tilde{A};\ 4)\ (\widetilde{A \bigcup B});$$
$$5)\ (\widetilde{A \bigcap B});\ 6)\ (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap \tilde{B});\ 7)\ A \bigcup (\tilde{A} \bigcap B);$$
$$8)\ (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap \tilde{B}) \bigcup (\tilde{A} \bigcap B);\ 9)\ \tilde{M};\ 10) \tilde{\varnothing}.$$

1.1.12. Найти число подмножеств множества, состоящего из четырех элементов. Найти число различных его собственных разбиений.

1.1.13. Из числа указанных ниже множеств подобрать такие их системы, которые осуществляли бы разбиение множества всех целых чисел:

$M_0 = \{0\}$,
$M_1 = \{1\}$,
M_2 — множество всех целых положительных чисел,
M_3 — множество всех целых отрицательных чисел,
M_4 — множество всех четных чисел,
M_5 — множество всех нечетных чисел,
M_6 — множество всех простых натуральных чисел,
M_7 — множество всех составных натуральных чисел.

1.1.14. Пусть даны два разбиения множества M:

$$M = \bigcup_{\xi} A_{\xi}, \qquad M = \bigcup_{\lambda} B_{\lambda}.$$

Будет ли образовывать разбиение M совокупность всевозможных непустых множеств вида $A_{\xi} \bigcap B_{\lambda}$?

1.1.15. Для каждого элемента x множества M полагаем

$$N_x = M \diagdown \{x\}.$$

Найти

$$\bigcap_{x \in M} N_x.$$

1.1.16. Обозначив число элементов конечного множества X через $m(X)$, доказать, что для любых конечных множеств M, N, S имеют место соотношения:

1) $m(M \bigcup N) = m(M) + m(N) - m(M \bigcap N)$;

2) $m(M \bigcup N \bigcup S) =$
$$= m(M) + m(N) + m(S) - m(M \bigcap N) -$$
$$- m(M \bigcap S) - m(N \bigcap S) + m(M \bigcap N \bigcap S).$$

Сформулировать и доказать аналогичную формулу для произвольного числа конечных множеств.

1.1.17. Сколько семейств элементов можно составить из чисел множества $\{-1, 0, 1\}$ с множеством индексов $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

1.1.18. Выписать все элементы декартового произведения трех множеств:

$$M_1 = \{-1, 1\}, \quad M_2 = \{a, b, c\}, \quad M_3 = \{a\}.$$

1.1.19. Сколько элементов в декартовом произведении трех конечных множеств, состоящих из k_1, k_2 и k_3 элементов?

1.1.20. Каково должно быть разбиение конечного множества M на два непустых класса:

$$M = M_1 \bigcup M_2,$$

чтобы декартово произведение $M_1 \times M_2$ имело наибольшее число элементов?

§ 2. Отображения множеств

Пусть даны два множества A и B. *Отображением* φ множества A в B называется такое правило, которое каждому элементу a множества A ставит в соответствие некоторый вполне определенный элемент множества B, который в этом случае обозначают через $\varphi(a)$ или через φa и называют *образом* элемента a при отображении φ. Если при этом для любых не равных между собой элементов $a, a' \in A$ их образы $\varphi(a)$ и $\varphi(a')$ всегда различны, то отображение называется *взаимно однозначным*.

Если для всякого $b \in B$ существует $a \in A$ (все равно, один или несколько) такой, что $\varphi(a) = b$, то говорят, что φ является отображением A *на* B (следует всегда обращать внимание на то, говорится ли об отображении «на» или «в», при этом первое является частным случаем второго).

Для $A' \subset A$ под $\varphi(A')$ (также $\varphi A'$) понимают множество всех образов $\varphi(x)$ элементов $x \in A'$. Множество $\varphi(A')$ называют образом подмножества A' при отображении φ. Тем самым φ является отображением A на B тогда и только тогда, когда $\varphi(A) = B$.

Пусть $B' \subset B$. Совокупность всех $a \in A$ таких, что $\varphi(a) \in B'$, называют *полным прообразом множества* B'.

Пусть отображение φ множества A в множество B взаимно однозначно. Тогда естественным образом определяется отображение множества $\varphi(A)$ на множество A, называемое *обратным* к φ и обозначаемое через φ^{-1}. Именно, для каждого $z \in \varphi(A)$ существует и ввиду взаимной однозначности φ единственный элемент $a \in A$ такой, что

$$\varphi(a) = z.$$

Поэтому можно положить

$$\varphi^{-1}(z) = a.$$

При отображении A в B множества A и B могут иметь общие элементы, а в частности и совпадать.

Элемент $a \in A$ называется *неподвижной точкой* отображения φ, если $\varphi(a) = a$.

Пусть φ_1 есть отображение множества A_1 в множество B_1, а φ_2 — отображение A_2 в B_2, причем $A_1 \subset A_2$ и $B_1 \subset B_2$. Отображение φ_2 называется *продолжением* отображения φ_1, если φ_1 и φ_2 на A_1 совпадают, т. е. для любого $a \in A_1$ имеет место $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$.

Два множества A и B называются *равномощными* (или имеющими равную мощность, или эквивалентными), если существует взаимно однозначное отображение A на B (а тем самым, как следует из 1.2.9, и взаимно однозначное отображение B на A).

Говорят, что мощность множества A меньше мощности B, если они неравномощны, но A равномощно некоторому подмножеству множества B.

Под *мощностью* множества M понимают знак, сопоставленный классу всех множеств, равномощных M (следует принять во внимание 1.2.15). Мощности называют также *кардинальными числами*.

Под мощностью конечного множества, состоящего из n элементов, понимают число n. Про бесконечные множества говорят, что их мощность бесконечна.

Множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называется *счетным*. Тем самым счетность множества есть не что иное, как возможность перенумеровать все его элементы при помощи всех натуральных чисел.

Известна важная теорема, которая, впрочем, нами в дальнейшем не будет использоваться.

Для любых двух множеств A и B всегда имеет место одна и только одна из трех возможностей:

1) *A равномощно B*;
2) *мощность A меньше мощности B*;
3) *мощность B меньше мощности A*.

Необходимо отметить, что в некоторых математических работах образ элемента a при отображении φ нередко обозначают через $a\varphi$ или a^{φ} (вместо $\varphi a = \varphi(a)$, принятого в настоящей книге и вообще являющегося более распространенным).

1.2.1. Пусть конечное множество A состоит из n элементов и конечное множество B из m элементов. Определить число различных отображений A в B. Определить, когда существуют отображения A на B и когда существуют взаимно однозначные отображения A в B; когда существуют взаимно однозначные отображения A на B и каково их число.

1.2.2.Т. Доказать, что всякое бесконечное множество обладает счетным подмножеством.

Примечание. Это означает, что мощность счетного множества меньше или равна мощности всякого другого бесконечного множества.

1.2.3.У. Пусть A есть множество целых чисел, B — множество всех натуральных чисел и C — множество всех про-

стых натуральных чисел. Существуют ли такие взаимно однозначные отображения φ множества C на A и C на B, что для $p_1 \leqslant p_2$ (p_1, $p_2 \in C$) всегда имеет место

$$\varphi(p_1) \leqslant \varphi(p_2)?$$

1.2.4. Сколько существует отображений множества $M = \{a, b, c, d\}$ в себя, имеющих неподвижные точки?

1.2.5. Пусть n — фиксированное натуральное число, φ — отображение множества всех натуральных чисел $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$ в себя, ставящее в соответствие каждому $k \in M$ число

$$\varphi(k) = \begin{cases} n - k & (\text{если } k < n), \\ n + k & (\text{если } k \geqslant n). \end{cases}$$

Будет ли φ взаимно однозначным? Каков образ $\varphi(M)$?

1.2.6. Пусть N — множество всех непрерывных вещественных функций, заданных на всей вещественной оси, φ — отображение N в себя, ставящее в соответствие каждой функции $f(x)$ из N функцию

$$(x^2 - 1) f(x).$$

Будет ли φ взаимно однозначным? Является ли φ отображением N на само себя?

1.2.7. Пусть S — множество всех вещественных функций, заданных на всей вещественной оси; $h(x)$ — некоторая фиксированная функция из их числа. Пусть ψ_h — отображение S в себя, ставящее в соответствие функции $f(x) \in S$ функцию

$$h(x)\ f(x).$$

Какому условию должна удовлетворять функция $h(x)$, чтобы соответствие ψ_h было взаимно однозначным?

Примечание. Результат сопоставить с результатом предыдущей задачи.

1.2.8. Каждому треугольнику T, длины сторон которого суть a, b, c, сопоставим треугольник T', стороны которого имеют длины

$$\frac{a+b}{2}, \qquad \frac{b+c}{2}, \qquad \frac{c+a}{2}.$$

Будет ли отображение множества всех треугольников в себя, ставящее в соответствие треугольнику T треугольник T',

взаимно однозначным? Будет ли оно отображением этого множества на себя? Какие треугольники являются неподвижными точками этого отображения?

1.2.9. Пусть φ — взаимно однозначное отображение множества A в множество B. Доказать, что обратное отображение φ^{-1} множества $\varphi(A)$ на A является взаимно однозначным.

1.2.10. Пусть φ — взаимно однозначное отображение множества A в B. Доказать, что $(\varphi^{-1})^{-1}=\varphi$.

1.2.11. Пусть множество M представлено в виде непересекающегося объединения подмножеств, состоящих из одного или двух элементов, и пусть φ — такое отображение множества M в себя, что $\varphi(x)=x$, если элемент x один составляет одну из компонент указанного разбиения, и $\varphi(x)=y$, если x входит в компоненту разбиения, состоящую из двух элементов, и y является вторым элементом этой компоненты. Доказать, что φ взаимно однозначно и что $\varphi^{-1}=\varphi$.

1.2.12. Пусть φ — такое взаимно однозначное отображение множества M в себя, что $\varphi^{-1}=\varphi$. Доказать, что φ может быть получено методом, описанным в предыдущей задаче.

1.2.13.Т. Пусть мощность множества A меньше или равна мощности множества B, а мощность B в свою очередь меньше или равна мощности множества C. Доказать, что мощность A меньше или равна мощности C.

1.2.14. Доказать, что мощность любого конечного множества меньше мощности любого бесконечного множества.

1.2.15.Т. Пусть множество A равномощно множеству B, а B равномощно множеству C. Доказать, что множества A и C равномощны.

1.2.16. Доказать, что всякое бесконечное подмножество счетного множества само счетно.

1.2.17. Дано счетное множество конечных множеств M_1, M_2, ... Доказать, что их объединение $\bigcup_k M_k$ конечно или счетно.

1.2.18.Т.У. Пусть множество множеств M_k $(k=1, 2, \ldots)$ конечно или счетно. При этом каждое из множеств M_k конечно или счетно. Доказать, что объединение $\bigcup_k M_k$ является конечным или счетным. Выяснить, когда имеет место первое и когда второе.

1.2.19.Т.У. Доказать, что множество всех рациональных чисел счетно.

1.2.20.У. Пусть множество M бесконечно и множество N конечно или счетно. Доказать, что мощности множеств M и $M \bigcup N$ равны.

1.2.21.У. Доказать, что множество всех полиномов с рациональными коэффициентами счетно.

1.2.22. Доказать, что множество всех матриц с рациональными коэффициентами счетно.

1.2.23.Т.У. Доказать, что множество всех вещественных чисел r таких, что $0 \leqslant r \leqslant 1$, несчетно.

1.2.24.Т.У. Доказать, что множество вещественных чисел несчетно.

Примечание. Мощность множества всех вещественных чисел называется *континуумом.* Про множества, равномощные этому множеству, говорят, что они континуальные или континуальной мощности.

1.2.25.Т.У. Комплексное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого отличного от нуля полинома одной переменной с целыми коэффициентами. Числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными.*

Доказать, что множество всех алгебраических чисел счетно, множество всех трансцендентных чисел несчетно, множество всех вещественных трансцендентных чисел несчетно.

1.2.26.У. Доказать, что следующие множества точек прямой все равномощны между собою:

1) множество всех точек прямой;

2) множество всех точек произвольного открытого отрезка прямой;

3) множество всех точек произвольного замкнутого отрезка прямой;

4) множество всех точек прямой, не входящих в некоторый выделенный отрезок (все равно, замкнутый или открытый).

1.2.27.У. Пусть A и B — произвольные множества, но только B содержит не менее двух элементов. M — множество всевозможных отображений A в B. Доказать, что мощность множества M больше мощности множества A $(A \neq \varnothing)$.

1.2.28.У. Пусть P_M — множество всех подмножеств множества M. Доказать, что мощность множества P_M больше мощности множества M $(M \neq \varnothing)$.

1.2.29. Пусть отображение φ_2 есть продолжение отображения φ_1. Если φ_2 взаимно однозначно, то и φ_1 будет взаимно однозначным. Доказать.

1.2.30. Пусть φ_1, φ_2, φ_3 — отображения некоторых множеств, причем φ_3 — продолжение φ_2, а φ_2 — продолжение φ_1. Доказать, что φ_3 является продолжением отображения φ_1.

1.2.31. Пусть N — множество всех натуральных чисел и N' — множество всех натуральных четных чисел; φ — некоторое отображение N' в N. Когда найдется взаимно однозначное отображение множества N в себя, являющееся продолжением отображения φ?

§ 3. Бинарные отношения

Пусть даны два множества Ω_1 и Ω_2. Их декартово произведение $\Omega_1 \times \Omega_2$, т. е. множество всевозможных пар вида (α, β), где $\alpha \in \Omega_1$ и $\beta \in \Omega_2$, называется *универсальным бинарным отношением* между элементами Ω_1 и Ω_2 (при этом существенно, в каком порядке упоминаются множества Ω_1 и Ω_2). Всякое его подмножество $\rho \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ называется бинарным отношением между элементами Ω_1 и Ω_2.

Пусть ρ — некоторое бинарное отношение между элементами множеств Ω_1 и Ω_2. Говорят, что элементы $\alpha \in \Omega_1$ и $\beta \in \Omega_2$ находятся между собою в этом отношении, если $(\alpha, \beta) \in \rho$. Помимо указанной записи включения мы будем также употреблять для этого запись

$$\alpha \sim \beta \ (\rho).$$

Для некоторых бинарных отношений существуют особые знаки, употребляемые аналогичным образом вместо $\sim$. Если ясно, о каком отношении идет речь, указание в скобках на данное бинарное отношение может быть опущено.

Отметим, что нередко условие $(\alpha, \beta) \in \rho$ записывают в виде $\alpha\rho\beta$.

Пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств Ω_1 и Ω_2. Через $\mathrm{pr}_1\,\rho$ обозначается совокупность всех таких элементов $\alpha \in \Omega_1$, для которых найдется такой $\beta \in \Omega_2$, что $\alpha \sim \beta \ (\rho)$. Аналогично определяется $\mathrm{pr}_2\,\rho \subset \Omega_2$.

Пусть бинарное отношение ρ между элементами множеств Ω_1 и Ω_2 таково, что $\mathrm{pr}_1\,\rho = \Omega_1$ и $\mathrm{pr}_2\,\rho = \Omega_2$, причем $\alpha_1 \sim \beta \ (\rho)$ и $\alpha_2 \sim \beta \ (\rho)$ имеет место лишь при $\alpha_1 = \alpha_2$, так же как $\alpha \sim \beta_1 \ (\rho)$ и $\alpha \sim \beta_2 \ (\rho)$ имеют место лишь при $\beta_1 = \beta_2$. В этом случае говорят, что ρ осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементами множеств A и B. Для наглядности часто пишут:

$$\alpha_\xi \leftrightarrow \beta_\xi, \qquad \alpha_\eta \leftrightarrow \beta_\eta, \ \ldots,$$

где $\alpha\xi \sim \beta_\xi \ (\rho)$, $\alpha_\eta \sim \beta_\eta \ (\rho)$, ... В силу свойства ρ здесь каждый элемент α_ξ из A встречается лишь один раз только в одной из этих пар $(\alpha_\xi \leftrightarrow \beta_\xi)$ и каждый элемент β_η из B встречается лишь один раз только в одной из этих пар $(\alpha_\eta \leftrightarrow \beta_\eta)$.

Для бинарного отношения ρ между элементами множеств Ω_1 и Ω_2 определяется естественным образом бинарное отношение ρ^*

между элементами Ω_2 и Ω_1, согласно которому $\beta \sim \alpha\,(\rho^*)$ для $\beta \in \Omega_2$ и $\alpha \in \Omega_1$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha \sim \beta\,(\rho)$.

Отношение ρ^* называется *транспонированным* относительно ρ (или, как чаще говорят, обратным, употребляя при этом обозначение ρ^{-1} вместо принятого здесь ρ^*).

Так же для ρ определяется дополнительное бинарное отношение $\bar{\rho}$ между элементами Ω_1 и Ω_2, согласно которому $\alpha \sim \beta\,(\bar{\rho})$, где $\alpha \in \Omega_1$, $\beta \in \Omega_2$, имеет место для всех тех пар (α, β), которые не содержатся в ρ.

Поскольку бинарные отношения являются подмножествами универсального бинарного отношения $\Omega_1 \times \Omega_2$, понятно, что означают для них выражения: $\rho_1 \subseteq \rho_2$, $\rho_1 \bigcup \rho_2$, $\rho_1 \bigcap \rho_2$.

В дальнейшем нас, как правило, будут интересовать бинарные отношения в одном и том же множестве Ω, т. е. подмножества декартова произведения $\Omega \times \Omega$.

Универсальное бинарное отношение $\Omega \times \Omega$ будем часто обозначать через ω_Ω или просто ω, когда ясно, о каком Ω идет речь.

Пустое бинарное отношение, т. е. бинарное отношение, представляющее собою пустое подмножество $\Omega_1 \times \Omega_2$, обычно так и будем обозначать через $\varnothing$.

Диагональю в множестве Ω называется бинарное отношение Δ, согласно которому $\alpha \sim \beta\,(\Delta)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$.

Пусть ρ — бинарное отношение в множестве Ω. Оно называется *рефлексивным*, если для любого $\alpha \in \Omega$ имеет место $\alpha \sim \alpha\,(\rho)$.

ρ называется *транзитивным*, если из $\alpha \sim \beta\,(\rho)$ и $\beta \sim \gamma\,(\rho)$ всегда следует $\alpha \sim \gamma\,(\rho)$.

ρ называется *симметричным*, если из $\alpha \sim \beta\,(\rho)$ всегда следует $\beta \sim \alpha\,(\rho)$. Отношение ρ называется *антисимметричным*, если ни для каких $\alpha, \beta \in \Omega$, где $\alpha \neq \beta$, невозможно одновременно $\alpha \sim \beta\,(\rho)$ и $\beta \sim \alpha\,(\rho)$.

Бинарное отношение в Ω, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и симметричности, называется *отношением эквивалентности* или просто *эквивалентностью* в Ω.

Отметим, что в том случае, когда бинарное отношение ρ является эквивалентностью, наравне с обозначением $\alpha \sim \beta\,(\rho)$ в литературе часто употребляется обозначение $\alpha \equiv \beta\,(\rho)$.

Пусть ρ — некоторая эквивалентность в множестве M. Если $x \sim y\,(\rho)$ (а потому и $y \sim x\,(\rho)$), то x и y называются эквивалентными относительно ρ или ρ-эквивалентными. Непустое подмножество K множества M называется *ρ-классом*, если всякие два элемента из K являются ρ-эквивалентными и никакой элемент из K не эквивалентен никакому элементу из $M \setminus K$. Множество всех ρ-классов обозначается обычно через M/ρ.

Бинарное отношение в Ω, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности, называется *отношением упорядоченности*, или просто *упорядоченностью*, или, как еще говорят, *порядком* (иногда говорят «частичная упорядоченность», «частичный порядок»).

Упорядоченность ρ в Ω называется *линейной*, если для любых $\alpha, \beta \in \Omega$ всегда выполняется $\alpha \sim \beta\,(\rho)$ или $\beta \sim \alpha\,(\rho)$. Линейно упорядоченное множество иногда называют *цепью*.

Линейная упорядоченность ρ называется *полной*, если в любом непустом подмножестве $\Omega' \subset \Omega$ найдется такой элемент $\alpha_0 \in \Omega'$, что $\alpha_0 \sim \alpha\,(\rho)$ имеет место для всех $\alpha \in \Omega'$.

Для упорядоченностей вместо знака $\sim$ чаще употребляется знак $\leqslant$ (или сходный знак $<$). При этом $\alpha \geqslant \beta$ понимается как равнозначное с $\beta \leqslant \alpha$. При $\alpha \leqslant \beta\,(\rho)$ говорят, что элемент α *предшествует* элементу β относительно упорядоченности ρ.

Множество, рассматриваемое относительно некоторой определенной в нем упорядоченности, называется *упорядоченным*, а если упорядоченность линейная или полная, то линейно упорядоченным и вполне упорядоченным.

Элемент α упорядоченного множества Ω называется *максимальным*, если $\alpha \leqslant \beta$ невозможно ни для какого $\beta \in \Omega$, отличного от α, и *минимальным*, если $\gamma \leqslant \alpha$ невозможно ни для какого $\gamma \in \Omega$, отличного от α. Элемент α называется *универсально максимальным*, если $\xi \leqslant \alpha$ имеет место для всякого $\xi \in \Omega$, и *универсально минимальным*, если $\alpha \leqslant \xi$ имеет место для всякого $\xi \in \Omega$.

1.3.1. Пусть ρ и σ оба являются бинарными отношениями между элементами множеств Ω_1 и Ω_2.

Доказать, что следующие условия все равносильны между собою: 1) из $\alpha \sim \beta\,(\rho)$ всегда следует $\alpha \sim \beta\,(\sigma)$; 2) $\rho \subset \sigma$; 3) $\rho \bigcup \sigma = \sigma$; 4) $\rho \bigcap \sigma = \rho$; 5) $\rho \bigcap \bar{\sigma} = \varnothing$; 6) $\bar{\rho} \supset \bar{\sigma}$.

1.3.2. Пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств Ω_1 и Ω_2. Показать, что

$$\rho \bigcup \bar{\rho} = \omega, \qquad \rho \bigcap \bar{\rho} = \varnothing.$$

Обратно, если для бинарного отношения σ между элементами Ω_1 и Ω_2:

$$\rho \bigcup \sigma = \omega, \qquad \rho \bigcap \sigma = \varnothing,$$

то $\sigma = \bar{\rho}$. Доказать.

1.3.3. В множестве всех натуральных чисел N определены бинарные отношения ρ_k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, согласно которым $n \sim m\,(\rho_k)$, если $n - m = k$. Найти: 1) $\mathrm{pr}_1\,\rho_k$; 2) $\mathrm{pr}_2\,\rho_k$; 3) $\sigma = \bigcup\limits_k \rho_k$; 4) $\overline{\sigma^*}$; 5) $\tau = \bigcap\limits_k \bar{\rho}_k$; 6) $\overline{\tau^*}$.

1.3.4 Пусть ρ, ρ_1, ρ_2 — некоторые бинарные отношения между элементами множеств Ω_1 и Ω_2. Доказать, что: 1) $\rho \bigcup \rho = \rho$; 2) $\rho \bigcap \rho = \rho$; 3) $(\rho^*)^* = \rho$; 4) $(\rho_1 \bigcup \rho_2)^* = \rho_1^* \bigcup \rho_2^*$; 5) $(\rho_1 \bigcap \rho_2)^* = \rho_1^* \bigcap \rho_2^*$; 6) $\overline{\rho^*} = (\bar{\rho})^*$; 7) $\bar{\bar{\rho}} = \rho$; 8) $\overline{(\rho_1 \bigcup \rho_2)} = \bar{\rho}_1 \bigcap \bar{\rho}_2$; 9) $\overline{(\rho_1 \bigcap \rho_2)} = \bar{\rho}_1 \bigcup \bar{\rho}_2$.

1.3.5. Пусть R — множество всех вещественных чисел и Γ — декартово произведение:

$$\Gamma = \underbrace{R \times R \times \ldots R}_{n};$$

ρ_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — бинарное отношение в множестве Γ, согласно которому

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \sim (b_1, b_2, \ldots, b_n) (\rho_{ij}),$$

если $a_1 + a_2 + \ldots + a_i = b_1 + b_2 + \ldots + b_j$.

Выяснить, что представляют собою бинарные отношения:

1) $\tau_1 = \rho_{11} \cap \rho_{21} \cap \ldots \cap \rho_{n1}$;

2) $\tau_2 = \rho_{11} \cap \rho_{22} \cap \ldots \cap \rho_{nn}$;

3) $\tau_3 = \bigcap\limits_{i,j} \rho_{ij}$.

1.3.6. Выяснить, какими из основных свойств: рефлексивностью, транзитивностью, симметричностью, антисимметричностью — обладают нижеследующие бинарные отношения в множестве всех натуральных чисел.

1) $n \sim m (\rho_1)$, если n и m взаимно просты;

2) $n \sim m (\rho_2)$, если n — делитель m;

3) $n \sim m (\rho_3)$, если $n = m^2$;

4) $n \sim m (\rho_4)$, если $n < m$;

5) $n \sim m (\rho_5)$, если $n \leqslant m$;

6) $n \sim m (\sigma_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, если $m - n = k$.

1.3.7. Пусть $\Omega' \subset \Omega$ и ρ — некоторое бинарное отношение в Ω. В Ω' определяем бинарное отношение ρ', полагая $\alpha \sim \beta (\rho')$ $(\alpha, \beta \in \Omega')$, если $\alpha \sim \beta (\rho)$ в Ω. Показать, что если ρ в Ω обладает каким-либо из свойств: рефлексивностью, транзитивностью, симметричностью, антисимметричностью, то и ρ' в Ω' будет обладать соответствующим свойством. Если ρ было эквивалентностью, то и ρ' будет ею, если ρ было упорядоченностью, то и ρ' будет ею, если при этом упорядоченность ρ была линейной, то и ρ' будет линейна.

1.3.8. Пусть дано разбиение некоторого множества M. Определяем в M бинарное отношение ρ, полагая $x \sim y (\rho)$ $(x, y \in M)$, если x и y лежат в одном и том же классе разбиения. Доказать, что ρ является эквивалентностью.

1.3.9.Т Пусть ρ — некоторая эквивалентность в множестве M. Доказать, что всякие два ρ-класса или совпадают или не пересекаются; совокупность всех ρ-классов образует

разбиение множества M. Эквивалентность, соответствующая этому разбиению по 1.3.8, есть не что иное, как исходная эквивалентность ρ.

Примечание. Сопоставляя 1.3.8 и 1.3.9, мы видим, что задать разбиение множества это все равно, что задать эквивалентность, соответствующую этому разбиению, и наоборот. Обычно не делают различия между эквивалентностями и разбиениями (без пустых классов), так что если ρ есть некая эквивалентность, то и соответствующее ей разбиение обозначается той же буквой ρ.

1.3.10.Т. Пусть ρ — некоторое бинарное отношение в множестве Ω. Бинарное отношение ρ' определяется следующим образом: $\alpha \sim \beta\,(\rho')$ имеет место тогда и только тогда, когда найдутся такие $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \Omega$, что $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_1 \sim \gamma_2\,(\rho)$, $\gamma_2 \sim \gamma_3\,(\rho)$, $\gamma_3 \sim \gamma_4\,(\rho)$, $\ldots$, $\gamma_{n-1} \sim \gamma_n\,(\rho)$, $\gamma_n = \beta$. Доказать, что:

1) $\rho \subseteq \rho'$;

2) ρ' транзитивно;

3) ρ' является пересечением множества всех таких транзитивных бинарных отношений σ в Ω, которые содержат ρ.

Примечание. Тем самым ρ' является универсально минимальным элементом в упорядоченном по включению множестве всех транзитивных бинарных отношений в Ω, следующих за ρ. Бинарное отношение ρ' часто называется *транзитивным замыканием* бинарного отношения ρ.

1.3.11. Пусть ε — произвольное фиксированное положительное вещественное число. В множестве R всех вещественных чисел определено бинарное отношение ρ, согласно которому $a \sim b\,(\rho)$, если $0 \leqslant b - a < \varepsilon$. Выяснить, что представляет собою транзитивное замыкание ρ и транзитивное замыкание $\rho \cup \rho^*$ (см. 1.3.10).

1.3.12. В множестве K всех комплексных чисел рассматриваются бинарные отношения ρ_1 и ρ_2, где $z_1 \sim z_2\,(\rho_1)$, если $|z_1| \leqslant |z_2|$; $z_1 \sim z_2\,(\rho_2)$, если $\arg z_1 = \arg z_2$ $(z_1, \ z_2 \in K)$. Найти: 1) $\rho_1 \cap \rho_1^*$; 2) $\rho_1 \cup \rho_1^*$; 3) $\rho_1 \cap \rho_1^* \cap \rho_2$; 4) транзитивное замыкание бинарного отношения $(\rho_1 \cap \rho_1^*) \cup \rho_2$ (см. 1.3.10).

1.3.13. Для бинарного отношения ρ в множестве Ω найти бинарное отношение ρ', которое будет универсально минимальным элементом в упорядоченном по включению множестве всех симметричных бинарных отношений σ в Ω таких, что $\rho \subseteq \sigma$ (симметричное замыкание ρ).

1.3.14. Для бинарного отношения ρ в множестве Ω найти такое бинарное отношение ρ', которое будет универсально минимальным элементом в упорядоченном по включению множестве всех рефлексивных бинарных отношений, следующих за ρ (рефлексивное замыкание ρ).

1.3.15. Выяснить, какие из следующих бинарных отношений, заданных в множестве всех непрерывных вещественных функций, определенных на некотором отрезке $[a, b]$ вещественной оси, являются упорядоченностями:

1) $f(x) \sim \varphi(x)(\rho_1)$, если при всяком $c \in [a, b]$ имеет место $f(c) \leqslant \varphi(c)$;

2) $f(x) \sim \varphi(x)(\rho_2)$, если $f(c_1) \leqslant \varphi(c_2)$, где $f(c_1)$ — наибольшее значение $f(x)$ на $[a, b]$, а $\varphi(c_2)$ — наибольшее значение $\varphi(x)$ на $[a, b]$;

3) $f(x) \sim \varphi(x)(\rho_3)$, если $\int\limits_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx \leqslant 0$;

4) $f(x) \sim \varphi(x)(\rho_4)$, если найдутся такие c_1, $c_2 \in [a, b]$, что $f(c_1) \leqslant \varphi(c_2)$;

5) $f(x) \sim \varphi(x)(\rho_5)$, если $f(a) \leqslant \varphi(a)$ и $f(b) \leqslant \varphi(b)$.

1.3.16. В множестве всех бесконечных последовательностей вещественных чисел заданы нижеследующие бинарные отношения. Выяснить, какие из них являются эквивалентностями, и какие упорядоченностями:

1) $(a_1, a_2, a_3 \ldots) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots)(\rho_1)$, если $a_k \leqslant b_k$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$;

2) $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots)(\rho_2)$, если найдется такое n, что $a_k = b_k$ для всех $k = n + 1, n + 2, \ldots$;

3) $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots)(\rho_3)$, если найдется такое n, что $a_k \leqslant b_k$ для всех $k = n + 1, n + 2, \ldots$;

4) $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots)(\rho_4)$, если или $a_k = b_k$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$ или найдется такое n, что $a_n < b_n$ и $a_k \leqslant b_k$ для всех $k = n + 1, n + 2, \ldots$

1.3.17. Доказать, что в конечном упорядоченном множестве всегда имеются минимальные элементы и максимальные элементы.

1.3.18.Т.У. Доказать, что для всякой упорядоченности ρ в конечном множестве Ω всегда найдется такая линейная упорядоченность ρ', которая включает ρ, т. е. $\rho \subset \rho'$.

Примечание. На самом деле указанное утверждение справедливо не только для конечного, но для любого Ω.

1.3.19. Пусть $\{\rho_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ есть некоторая совокупность упорядоченностей в множестве Ω. Доказать, что бинарное отношение

$$\sigma = \bigcap_{\xi \in \Gamma} \rho_\xi$$

также будет упорядоченностью в Ω.

1.3.20. Описать все линейно упорядоченные множества, обладающие тем свойством, что для любых элементов $\alpha \leqslant \beta$ существует лишь конечное множество элементов γ таких, что $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$.

1.3.21. Какие из следующих множеств рациональных чисел, упорядоченных по величине, будут вполне упорядоченными:

1) множество всех целых чисел;
2) множество всех целых положительных чисел;
3) множество всех целых отрицательных чисел;
4) множество всех рациональных чисел;
5) множество всех чисел вида $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$;
6) множество всех чисел вида $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$;
7) множество всех чисел вида $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

1.3.22. В множестве M имеется линейная упорядоченность ρ такая, что и сама ρ и ρ^* являются полными упорядоченностями. Что представляет собою M?

1.3.23. В множестве M дано разбиение $M = \{N_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$, в совокупности классов которого определена полная упорядоченность. В каждом классе в свою очередь определена полная упорядоченность. В M определяется бинарное отношение ρ, согласно которому $x \sim y\,(\rho)$, если или 1) $x \in N_\alpha$, $y \in N_\beta$, $\alpha \neq \beta$ и $N_\alpha \leqslant N_\beta$ согласно упорядочению в совокупности классов разбиения, или 2) $x, y \in N_\xi$ и x предшествует y согласно упорядоченности в N_ξ. Доказать, что ρ есть полная упорядоченность в M.

§ 4. Умножение бинарных отношений

Пусть ρ и σ — два бинарных отношения в множестве Ω. Их произведением называется бинарное отношение $\tau = \rho\sigma$ в Ω, согласно которому $\alpha \sim \beta\,(\tau)$ $(\alpha, \beta \in \Omega)$ имеет место тогда и только тогда, когда найдется такой $\gamma \in \Omega$, что $\alpha \sim \gamma\,(\rho)$ и $\gamma \sim \beta\,(\sigma)$.

В частности, можно рассматривать произведение бинарного отношения ρ само на себя, причем употребляется запись $\rho\rho = \rho^2$. Благодаря ассоциативности (которая будет получена в 1.4.4) можно говорить о ρ^3, имея в виду $\rho^3 = (\rho\rho)\,\rho = \rho\,(\rho\rho)$ и т. д.

Для $\Omega' \subset \Omega$ и бинарного отношения ρ в множестве Ω определено подмножество $\rho\Omega'$, состоящее из всех тех элементов $\alpha \in \Omega$, для каждого из которых найдется такой $\beta \in \Omega'$, что $\alpha \sim \beta\,(\rho)$. Аналогично $\Omega'\rho$ означает совокупность всех тех $\alpha \in \Omega$, для каждого из которых найдется такой $\beta \in \Omega'$, что $\beta \sim \alpha\,(\rho)$.

В частности, если Ω' состоит из одного элемента: $\Omega' = \{\alpha\}$ ($\alpha \in \Omega$), то множества $\rho\alpha$ и $\alpha\rho$ иногда называют срезами (правым и левым) бинарного отношения ρ по элементу α.

1.4.1. В множестве всех натуральных чисел N определены нижеследующие бинарные отношения: ρ, σ, τ, λ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$):

$n \sim m\,(\rho)$, если n есть делитель m;

$n \sim m\,(\sigma)$, если $n < m$;

$n \sim m\,(\tau)$, если n и m взаимно просты;

$n \sim m\,(\lambda_k)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), если $|m - n| = k$.

Найти произведения

$$\rho^2,\ \rho\sigma,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \rho\lambda_k,\ \lambda_k\rho,\ \sigma\lambda_k,\ \lambda_k\sigma,\ \lambda_k\lambda_l.$$

Примечание. Обратить внимание на случаи, показывающие, что умножение бинарных отношений некоммутативно.

1.4.2. Для бинарных отношений ρ и σ в множестве Ω доказать, что

$$\mathrm{pr}_1\,(\rho\sigma) \subset \mathrm{pr}_1\,\rho, \qquad \mathrm{pr}_2\,(\rho\sigma) \subset \mathrm{pr}_2\,\sigma.$$

1.4.3. Для бинарного отношения ρ в множестве Ω доказать, что

$$\mathrm{pr}_1\,\rho = \rho\Omega, \qquad \mathrm{pr}_2\,\rho = \Omega\rho.$$

1.4.4. Пусть в множестве Ω даны три бинарных отношения ρ_1, ρ_2, ρ_3. Доказать, что

$$(\rho_1\rho_2)\,\rho_3 = \rho_1\,(\rho_2\rho_3)$$

(ассоциативность умножения бинарных отношений).

1.4.5. Пусть $\Omega' \subset \Omega$, а ρ_1 и ρ_2 — два бинарных отношения в Ω. Доказать, что

$$(\rho_1\rho_2)\,\Omega' = \rho_1\,(\rho_2\Omega'),$$
$$\Omega'\,(\rho_1\rho_2) = (\Omega'\rho_1)\,\rho_2.$$

1.4.6. Пусть Z — множество всех комплексных чисел. В Z определены бинарные отношения ρ, σ, τ, согласно которым

$$z_1 \sim z_2 (\rho), \quad \text{если} \quad |z_1| = |z_2|;$$
$$z_1 \sim z_2 (\sigma), \quad \text{если} \quad \arg z_1 = \arg z_2;$$
$$z_1 \sim z_2 (\tau), \quad \text{если} \quad \bar{z}_1 = z_2.$$

R — множество всех вещественных чисел, C — множество всех комплексных чисел z, у которых $|z| \leqslant 1$, $P = \{i\}$.

Найти: ρR, $R\rho$, σR, $R\tau$, ρC, $C\sigma$, $C\tau$, ρP, $P\sigma$, $P\tau$.

1.4.7. Пусть ρ_1, ρ_2, σ — три бинарных отношения в множестве Ω, причем $\rho_1 \subset \rho_2$. Доказать, что

$$\sigma\rho_1 \subset \sigma\rho_2, \qquad \rho_1\sigma \subset \rho_2\sigma.$$

1.4.8. Доказать, что для любых бинарных отношений τ, ρ_α, ρ_β, ... в множестве Ω справедливо

$$\tau(\rho_\alpha \cup \rho_\beta \cup \ldots) = \tau\rho_\alpha \cup \tau\rho_\beta \cup \ldots,$$
$$(\rho_\alpha \cup \rho_\beta \cup \ldots)\tau = \rho_\alpha\tau \cup \rho_\beta\tau \cup \ldots,$$
$$\tau(\rho_\alpha \cap \rho_\beta \cap \ldots) \subset \tau\rho_\alpha \cap \tau\rho_\beta \cap \ldots,$$
$$(\rho_\alpha \cap \rho_\beta \cap \ldots)\tau \subset \rho_\alpha\tau \cap \rho_\beta\tau \cap \ldots$$

1.4.9. В множестве, состоящем из двух элементов $\{a, b\}$, определены бинарные отношения ρ_1 и ρ_2:

$$\rho_1 = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}, \quad \rho_2 = \{(a, b), (b, a)\}.$$

Найти и сравнить

$$\omega(\rho_1 \cap \rho_2), \qquad \omega\rho_1 \cap \omega\rho_2.$$

Примечание. Результат сопоставить с результатом задачи 1.4.8.

1.4.10. Найти следующие произведения бинарных отношений в множестве Ω:

$$\omega^2, \quad \omega\overline{\Delta}, \quad \overline{\Delta}\omega, \quad \overline{\Delta}^2.$$

1.4.11. В множестве всевозможных последовательностей из n элементов некоторого множества M определены бинарные отношения ρ_k $(k = 1, 2, \ldots n)$, согласно которым

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \sim (b_1, b_2, \ldots, b_n) \ (\rho_k),$$

если $a_k = b_k$.

Найти $\rho_i\rho_j$.

1.4.12. В множестве Ω, состоящем из всех подмножеств множества M, рассматривается бинарное отношение включения ρ (т. е. $P \sim Q(\rho)$, где $P, Q \subset M$, если $P \subset Q$). Найти

$$\rho^2, \ \rho\bar{\rho}, \ \bar{\rho}\rho, \ \rho\rho^*, \ \bar{\rho}\rho^*.$$

1.4.13. Пусть ρ — произвольное бинарное отношение в множестве Ω. Выяснить, что представляют собою произведения $\rho\Delta$, $\Delta\rho$, $\omega\rho$, $\rho\omega$.

1.4.14. Выяснить, для каких бинарных отношений ρ в множестве Ω выполняются следующие равенства:

1) $\omega\rho = \omega$; 2) $\rho\omega = \omega$; 3) $\rho\omega\rho = \omega$; 4) $\omega\rho\omega = \omega$; 5) $\rho\rho^* = \omega$.

1.4.15. В множестве всех вещественных непрерывных функций, заданных на замкнутом промежутке $E = [a, b]$, определены бинарные отношения σ_1, σ_2, σ_3, согласно которым

$f(x) \sim \varphi(x)(\sigma_1)$, если $f(c) \leqslant \varphi(c)$ для всякого $c \in E$;
$f(x) \sim \varphi(x)(\sigma_2)$, если $f(a) = \varphi(a)$, $f(b) = \varphi(b)$;
$f(x) \sim \varphi(x)(\sigma_3)$, если $f(c) \neq \varphi(c)$ для всякого $c \in E$.

Найти

$$\sigma_1^2, \ \sigma_2^2, \ \sigma_3^2, \ \sigma_1\sigma_2, \ \sigma_2\sigma_3, \ \sigma_3\sigma_2.$$

1.4.16.Т. Пусть ρ — произвольное бинарное отношение в множестве Ω. Доказать, что для транзитивности ρ необходимо и достаточно выполнение $\rho^2 \subset \rho$.

1.4.17.Т. Пусть ρ_1 и ρ_2 — произвольные бинарные отношения в множестве Ω. Доказать, что

$$(\rho_1\rho_2)^* = \rho_2^*\rho_1^*.$$

1.4.18.Т. Пусть ρ — произвольное бинарное отношение в множестве Ω. Доказать, что $\rho\rho^*$ всегда является симметричным бинарным отношением.

1.4.19.Т. Доказать, что бинарное отношение ρ в множестве Ω является упорядоченностью тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

$$\rho^2 = \rho, \quad \rho \cap \rho^* = \Delta.$$

1.4.20. Пусть ρ_1 и ρ_2 являются бинарными отношениями в множестве Ω. Выяснить, всегда ли из рефлексивности обоих отношений ρ_1 и ρ_2 следует рефлексивность $\rho_1\rho_2$. Выяснить,

всегда ли из транзитивности ρ_1 и ρ_2 следует транзитивность $\rho_1\rho_2$. Выяснить, всегда ли из симметричности ρ_1 и ρ_2 следует симметричность $\rho_1\rho_2$. Выяснить, всегда ли из антисимметричности ρ_1 и ρ_2 следует антисимметричность $\rho_1\rho_2$.

1.4.21. Пусть ρ_1 и ρ_2 — две такие эквивалентности в множестве Ω, что $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$. Доказать, что тогда и $\rho_1\rho_2$ является эквивалентностью.

1.4.22. Пусть ρ_1 и ρ_2 — две линейные упорядоченности в множестве Ω. Выяснить, когда $\rho_1\rho_2$ будет линейной упорядоченностью в Ω.

1.4.23. Пусть ρ_1 и ρ_2 — симметричные бинарные отношения в множестве Ω, причем $\rho_1\rho_2 \subseteq \rho_2\rho_1$. Доказать, что $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$.

1.4.24. Пусть ρ — эквивалентность в некотором множестве Ω и σ — линейная упорядоченность в том же множестве. Какими из основных свойств: рефлексивностью, транзитивностью, симметричностью, антисимметричностью — обладают во всяком Ω следующие произведения:

$$\rho^2,\ \rho^3,\ \sigma^2,\ \sigma^3,\ \rho\sigma,\ \sigma\rho,\ \sigma\rho\sigma,\ \rho\sigma\rho.$$

1.4.25. Доказать, что для бинарного отношения ρ в множестве Ω равенство

$$\rho^2 \cap \rho = \emptyset$$

имеет место тогда и только тогда, когда из $\alpha \sim \beta(\rho)$ и $\beta \sim \gamma(\rho)$ всегда следует $\alpha \sim \gamma(\bar{\rho})$.

ГЛАВА II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ ОБЩЕГО ТИПА

§ 1. Понятие алгебраического действия

Говорят, что в множестве M задано алгебраическое действие или, короче, просто действие, если указано правило, сопоставляющее некоторым парам элементов из M, взятым в определенном порядке, элемент из того же множества M. Таким образом, действие есть отображение некоторого подмножества декартова произведения $M \times M$ в M.

Наравне с термином «действие» употребляют также термины «операция», «композиция». Иногда уточняют термин, говоря о бинарном действии, поскольку возможно рассмотрение законов, сопоставляющих элементы тройкам элементов, — тернарное действие — или даже последовательностям n элементов при любом натуральном n. Множество, рассматриваемое относительно некоторого заданного в нем действия, иногда называют *оперативом* или *группоидом*, хотя чаще последнему термину придают более узкий смысл.

Элемент z, сопоставленный паре (x, y) $(x, y \in M)$ при данном действии, называют *результатом* этого действия, совершенного над элементами x и y. Для его обозначения употребляют различные виды записи. Например, зафиксировав какую-либо букву, скажем f, пишут $z = f(x, y)$. Однако чаще вместо такой функциональной записи употребляют следующую форму записи. Элементы, над которыми совершается действие, пишут рядом, помещая между ними какой-либо специальный знак. Некоторые такие знаки хорошо известны еще из элементарной математики: $+$, $-$, $\times$, $:$. Они употребляются как для обычных действий сложения, вычитания, умножения, деления чисел, так и для других действий, которые могут и не иметь с ними ничего общего. Иногда также употребляют знаки вида $\bigcirc$, $*$ и т. п.

Очень распространены так называемая мультипликативная запись и терминология. Элементы, над которыми совершается действие, пишутся рядом без какого-либо знака между ними или же между ними ставится точка:

$$xy = z, \quad x \cdot y = z.$$

В этом случае элементы x и y называют *сомножителями* (соответственно левыми и правыми), а z — их *произведением.* При этом действие может не иметь никакого отношения к обычному умножению.

Иногда употребляются аддитивная запись и терминология, когда результат действия над x и y обозначают через $x+y$ с соответствующим употреблением терминов: сумма, слагаемые и т. д.

Разумеется, тогда, когда в том или ином конкретном множестве (например, состоящем из чисел, функций, матриц) названия определенных действий и соответствующие им знаки закреплены твердо установленным обычаем (сложение, умножение), они употребляются в соответствующем смысле без особых пояснений. В общем случае чаще всего используется мультипликативная терминология, часто без добавочных пояснений. В дальнейшем мы также будем обычно поступать таким образом.

Фактическое задание действия в множестве может быть произведено различными методами. Можно, исходя из конкретной природы элементов, составляющих M, указать закон (в частности, формулу), выделяющий те пары, для которых определен результат действия, и то, как строится элемент, являющийся результатом действия для каждой такой пары.

Возможно также непосредственное перечисление всех результатов действия. Его удобнее всего осуществить при помощи так называемой таблицы Кэли (называемой также таблицей умножения при мультипликативной записи). Слева и сверху квадратной таблицы выписываются все элементы множества. На пересечении строки, соответствующей элементу x, и столбца, соответствующего элементу y, пишут результат действия над парой (x, y) или черточку, если результат действия для данной пары не определен.

Хотя на самом деле таблица Кэли может быть построена лишь для конечного множества M и притом с не слишком большим числом элементов, теоретически можно рассматривать таблицу Кэли при любом множестве M — конечном и даже бесконечном.

Если в множестве M определено действие, то для каждого подмножества $M' \subset M$ действие в M определяет естественным образом действие в M'. Именно, для $x, y \in M'$ результат действия в M' определен и равен $z \in M'$, если для x, y, рассматриваемых как элементы M, результат определен и равен $z \in M'$. (Очень важно помнить, что, говоря о действии в каком-либо множестве, мы всегда требуем, чтобы результатами действия были элементы, принадлежащие этому множеству; случаев «внешнего действия», когда результатами считаются и элементы, не содержащиеся в самом множестве, мы совсем не рассматриваем.) О таком, по существу говоря, новом действии говорят также, что это есть ограничение основного действия на M'.

Два множества M_1 и M_2, в каждом из которых определено действие, обозначаемое соответственно через $\underset{1}{\circ}$ и $\underset{2}{\circ}$, называются *изоморфными* относительно этих действий, если между всеми элементами M_1 и всеми элементами M_2 можно установить такое взаимно однозначное соответствие:

$$x_1 \longleftrightarrow x_2, \ y_1 \longleftrightarrow y_2 \ (x_1, y_1 \in M_1; \ x_2, y_2 \in M_2),$$

что $x_1 \underset{1}{\circ} y_1$ определено в M_1 тогда и только тогда, когда для соответствующих им элементов в M_2 определено $x_2 \underset{2}{\circ} y_2$, причем элементы $x_1 \underset{1}{\circ} y_1$ и $x_2 \underset{2}{\circ} y_2$ соответствуют друг другу при рассматриваемом соответствии, т. е. $x_1 \underset{1}{\circ} y_1 \longleftrightarrow x_2 \underset{2}{\circ} y_2$.

Смысл и значение понятия изоморфизма заключаются в том, что изоморфные множества с действиями являются относительно этих действий совершенно одинаковыми. Если в таблице Кэли одного из них элементы расположить в том же порядке, в каком расположены соответствующие элементы во втором, то таблицы Кэли обоих множеств окажутся совпадающими (с точностью до обозначения элементов). Это означает, что действия в изоморфных множествах, по существу, совершенно одинаковы.

2.1.1. В множестве чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 рассматриваем действие сложения. Определить, для какого числа пар определен результат действия.

Примечание. Напоминаем, что в пределах рассматриваемого множества результат нашего действия над числами 6 и 7 следует считать неопределенным, ибо число 13 не содержится в нашем множестве.

2.1.2. В множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ рассматриваем действие обычного вычитания. Составить таблицу Кэли.

Примечание. Учесть примечание к задаче 2.1.1.

2.1.3. В множестве, состоящем из элементов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, действие $x_i \circ x_j$ задано таблицей Кэли:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	x_2	—	—	x_4	x_5	x_6
x_2	x_2	x_2	x_5	x_2	x_1	—
x_3	—	x_3	x_3	x_3	x_3	—
x_4	x_1	x_5	x_2	x_5	x_1	x_1
x_5	x_5	x_5	—	x_2	x_3	x_1
x_6	x_6	x_6	x_2	—	—	x_1

Выяснить, для каких x_i определены оба результата $(x_i \circ x_i) \circ x_i$ и $x_i \circ (x_i \circ x_i)$.

2.1.4. Можно ли построить такую таблицу Кэли для множества $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, чтобы $z_i \circ z_i$ было определено для всех z_i, кроме z_1, для которого $z_1 \circ z_1$ не определено, и чтобы ни $(z_i \circ z_j) \circ z_k$, ни $z_i \circ (z_j \circ z_k)$ не были определены

ни для какой тройки z_i, z_j, z_k $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$? Найти общий вид такой таблицы.

2.1.5. В множестве всех рациональных чисел M каждая из следующих формул определяет действие, результат которого определен для каждой пары элементов из M.

1) $$a \circ b = \frac{a+b}{2};$$

2) $$a \circ b = \frac{a(a+1)+b(b+1)}{2};$$

3) $$a \circ b = a^2 - 2ab + b^2.$$

Эти действия рассматриваются в множестве N, состоящем из всех натуральных чисел. Для каких пар элементов из N определены результаты этих действий в N?

2.1.6. Доказать, что всякое множество с действием изоморфно само себе относительно этого действия.

2.1.7. В множестве всех положительных рациональных чисел рассматривается действие обычного умножения. A есть его подмножество, состоящее из чисел, бо́льших 1, и B — подмножество, состоящее из чисел, меньших 1. Доказать, что относительно умножения A и B изоморфны.

2.1.8. M есть множество всех натуральных чисел, M_1 — его подмножество, состоящее из всех нечетных чисел, и M_2—подмножество, состоящее из всех четных чисел. Выяснить, будут ли какие-нибудь из множеств M, M_1, M_2 изоморфны между собою относительно действия обычного умножения.

2.1.9. Доказать, что множество всех положительных вещественных чисел изоморфно относительно обычного сложения множеству всех отрицательных вещественных чисел.

2.1.10. В множестве $G = \{2, 3, 4, 5\}$ рассматривается действие обычного сложения. В множестве $H = \{2, 4, 5, 10\}$ рассматривается действие обычного умножения. Доказать, что множества G и H изоморфны относительно указанных действий.

2.1.11.У. В множестве G всех вещественных положительных чисел рассматривается действие обычного умножения. В множестве H всех вещественных чисел рассматривается действие обычного сложения. Доказать, что относительно указанных действий множества G и H изоморфны.

2.1.12. Каково число неизоморфных между собою множеств с действием, состоящих из n элементов каждое $(n \geqslant 3)$,

таблица Кэли которых обладает следующим свойством. В n^2-1 ее клетках стоит один и тот же элемент. В одной клетке стоит черточка (результат действия не определен).

2.1.13. В множестве M_1, состоящем из элементов α, β, γ, δ, ε, действие определено таблицей Кэли:

	α	β	γ	δ	ε
α	α	α	α	α	α
β	α	β	γ	α	ε
γ	α	γ	β	β	ε
δ	δ	δ	δ	δ	δ
ε	ε	ε	ε	ε	ε

Множество M_2, состоящее из чисел -1, $0,1$, рассматривается относительно обычного умножения.

Существуют ли подмножества множества M_1, которые относительно действия, определяемого вышеприведенной таблицей, изоморфны M_2? Каково число таких подмножеств?

2.1.14. В множестве M, состоящем из всех матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где x — любое вещественное число, рассматривается действие умножения матриц. Доказать, что относительно этого действия M изоморфно множеству всех вещественных чисел, рассматриваемых относительно действия сложения.

2.1.15. В множестве $M=\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ рассматривается действие, согласно которому

$$x_i \circ x_j = x_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots).$$

Выяснить, каким своим подмножествам (рассматриваемым относительно действия, определяемого в них действием в M) изоморфно M.

2.1.16. Пусть в каждом из множеств M_1, M_2, M_3 задано некоторое действие. Относительно этих действий M_1 изоморфно M_2, а M_2 изоморфно M_3. Доказать, что тогда M_1 изоморфно M_3.

П р и м е ч а н и е. Благодаря этому, учитывая также результат 2.1.6 и то, что отношение изоморфизма по самому определению симметрично, можно заключить, что отношение

изоморфизма можно рассматривать как эквивалентность в классе всех множеств с действиями.

2.1.17.Т. Пусть в множестве Ω задано действие, согласно которому для любых α, β, $\gamma \in \Omega$ имеет место:

1) $\alpha \circ \alpha = \alpha$;

2) если $\alpha \circ \beta$ определено, то $\alpha \circ \beta \in \{\alpha, \beta\}$;

3) если $\alpha \circ \beta$ определено, то определено и $\beta \circ \alpha$, причем $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$;

4) если $\alpha \circ \beta = \alpha$ и $\beta \circ \gamma = \beta$, то определено $\alpha \circ \gamma$, причем $\alpha \circ \gamma = \alpha$.

Определяем в Ω бинарное отношение ρ, полагая $\alpha \sim \beta (\rho)$, если $\alpha \circ \beta$ определено и $\alpha \circ \beta = \alpha$.

Доказать, что ρ является отношением упорядоченности.

2.1.18.Т. Пусть в множестве Ω дано отношение упорядоченности ρ. Определяем в Ω действие, полагая $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = \alpha$ для таких пар α, $\beta \in \Omega$, для которых $\alpha \sim \beta (\rho)$. Доказать, что это действие удовлетворяет четырем условиям, сформулированным в предыдущей задаче.

Примечание. Результат сопоставить с результатом предыдущей задачи.

§ 2. Основные свойства действий

Общая теория алгебраических действий распадается на ряд алгебраических дисциплин, каждая из которых занимается множествами с тем или иным количеством действий, с теми или иными условиями, связывающими эти действия между собою, и с дополнительными условиями, налагаемыми на эти действия. В настоящей книге мы ограничиваемся изучением множеств с одним действием (конечно, в каждом из них могут более или менее естественно определяться и другие действия, но мы каждый раз интересуемся только одним из действий). Теория множеств с одним действием разбивается на ряд частных теорий, отличающихся друг от друга тем, что каждая из них обладает некоторыми основными свойствами. Какие из возможных свойств взять в качестве основных и тем самым на какие разделы разбивать общую теорию — это, конечно, зависит в значительной степени от фактического состояния науки в данный момент. С течением времени границы могут изменяться.

В настоящее время в качестве упомянутых основных свойств, в зависимости от выполнения или невыполнения которых классифицируются отдельные направления общей теории действий, следует принять указанные ниже.

Пусть в множестве M задано действие, для которого употребляем значок $\circ$ (пока мы не переходим к мультипликативной записи, которой в основном будем придерживаться в дальнейшем).

1. Действие называется *неограниченно применимым*, если результат действия $x \bigcirc y$ определен для любой пары элементов $x, y \in M$.

2. Действие называется *коммутативным*, если для всякой пары $x, y \in M$, для которой определен результат $x \bigcirc y$, обязательно определен и результат $y \bigcirc x$, причем выполняется

$$x \bigcirc y = y \bigcirc x.$$

3. Действие называется *ассоциативным*, если для всякой тройки $x, y, z \in M$, для которой определены результаты $(x \bigcirc y)$ и $(x \bigcirc y) \bigcirc z$, обязательно определены результаты $(y \bigcirc z)$, $x \bigcirc (y \bigcirc z)$ и наоборот, причем выполняется равенство

$$(x \bigcirc y) \bigcirc z = x \bigcirc (y \bigcirc z).$$

4. Действие обладает свойством *обратимости слева*, если для всяких $u, v \in M$ всегда найдется такой элемент $x \in M$, что определено $x \bigcirc u$ и выполняется

$$x \bigcirc u = v.$$

5. Действие обладает свойством *обратимости справа*, если для всяких $u, v \in M$ всегда найдется такой элемент $y \in M$, что определено $u \bigcirc y$ и выполняется

$$u \bigcirc y = v.$$

6. Действие обладает свойством *сократимости слева*, если из того, что определены $x \bigcirc u$ и $x \bigcirc v$ $(x, u, v \in M)$ и выполнено

$$x \bigcirc u = x \bigcirc v,$$

всегда следует $u = v$.

7. Действие обладает свойством *сократимости справа*, если из того, что определены $u \bigcirc x$ и $v \bigcirc x$ $(x, u, v \in M)$ и выполнено

$$u \bigcirc x = v \bigcirc x,$$

всегда следует $u = v$.

С вопросом о выполнении для какого-либо действия указанных свойств тесно связаны нижеследующие понятия.

Элемент u называется *левой единицей* для M, если для любого $x \in M$ определено $u \bigcirc x$ и имеет место

$$u \bigcirc x = x.$$

Элемент u называется *правой единицей* для M, если для любого $x \in M$ определено $x \bigcirc u$ и имеет место

$$x \bigcirc u = x.$$

Элемент u называется *двусторонней единицей* для M или просто *единицей*, если u является для M одновременно и левой и правой единицей.

Отметим, что вместо термина «единица» употребляют также и термины «единичный элемент» или «нейтральный элемент».

Если в множестве M имеется единица e, то элементы x и x' называются *взаимно обратными*, а каждый из них обратным для другого, если определены $x \bigcirc x'$ и $x' \bigcirc x$ и имеет место

$$x \bigcirc x' = x' \bigcirc x = e.$$

При мультипликативной записи элемент x', обратный x, обозначается обычно при помощи показателя степени -1:

$$x' = x^{-1}.$$

Элемент v называется *левым нулем* для M, если для любого $x \in M$ определено $v \bigcirc x$ и имеет место

$$v \bigcirc x = v.$$

Элемент v называется *правым нулем* для M, если для любого $x \in M$ определено $x \bigcirc v$ и имеет место

$$x \bigcirc v = v.$$

Элемент называется *двусторонним нулем* для M или просто *нулем*, если он является для M одновременно и левым и правым нулем. Вместо термина «нуль» употребляют также термины «нулевой элемент» или «аннулирующий элемент».

Элемент x называется *идемпотентным* (или идемпотентом), если $x \bigcirc x$ определено и имеет место $x \bigcirc x = x$.

Все вышеприведенные формулировки упрощаются, если действие обладает свойством неограниченной применимости. Такие упрощения полезно держать в памяти.

В этом параграфе всюду без дальнейших пояснений M будет обозначать множество с заданным в нем действием, для которого употребляется значок $\bigcirc$.

Напоминаем, что, как мы условились в § 1, для всякого $M' \subset M$ будем считать, что в M' определено это же самое действие в смысле, указанном в § 1.

2.2.1. Выяснить выполнение основных семи свойств и наличие единичного и нулевого элементов в множестве всех вещественных чисел, рассматриваемом относительно действий:

1) обычное сложение чисел;
2) обычное умножение чисел;
3) обычное вычитание чисел;
4) обычное деление чисел.

2.2.2. Те же вопросы, что и в 2.2.1, относительно тех же четырех действий выяснить для следующих множеств:

1) множество всех натуральных чисел;
2) множество всех целых чисел;
3) множество всех рациональных чисел;
4) множество всех положительных чисел;
5) множество всех отрицательных чисел.

2.2.3. В множестве всех непрерывных функций, заданных на одном и том же отрезке вещественной оси $[a, b]$, выяснить выполнение основных свойств и наличие единичного и нулевого элементов относительно действий:

1) обычное сложение функций;

2) обычное умножение функций;

3) обычное вычитание функций;

4) обычное деление функций.

2.2.4. Пусть в множестве M имеются левые единицы и правые единицы. Тогда в M имеется двусторонняя единица e, причем никаких других, ни левых, ни правых единиц, кроме e, в M не существует. Доказать.

Примечание. В частности, отсюда следует, что в M может существовать не более одной единицы.

2.2.5. Пусть в множестве M имеются левые нули и правые нули. Тогда в M имеется двусторонний нуль 0, причем никаких других ни левых, ни правых нулей, кроме 0, в M не существует. Доказать.

Примечание. Отсюда следует, что в M может существовать не более одного нуля.

2.2.6. В множестве N всех натуральных чисел для каждого из указанных ниже действий выяснить, какие из семи основных свойств выполнены. Существуют ли единицы и нули (левые, правые, двусторонние)? Какие элементы являются идемпотентами?

1) $a \circ b = c$, где c есть наибольший общий делитель чисел a и b;

2) $a \circ b = c$, где c есть наименьшее общее кратное чисел a и b;

3) $a \circ b = a^b$;

4) $a \circ b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

2.2.7. В множестве всех квадратных комплексных матриц порядка n, рассматриваемом относительно действия умножения матриц, выяснить, какие из семи основных свойств выполнены. Имеются ли нуль и единица? Какие элементы обладают обратными?

2.2.8. Пусть p, q, r — произвольные фиксированные вещественные числа. В множестве всех вещественных чисел рассматривается действие, результатом которого для чисел a, b является число $a \circ b = pa + qb + r$. Выяснить, при каких

значениях p, q, r это действие обладает теми или иными из семи основных свойств.

2.2.9.У. В множестве R_Ω всех бинарных отношений в множестве Ω рассматривается действие умножения бинарных отношений. Выяснить, какие из основных семи свойств имеют место. Имеются ли единица и нуль?

2.2.10. В множестве всех положительных вещественных чисел R рассматривается действие нахождения среднего геометрического, т. е. для $a, b \in R$ результат $a \circ b$ всегда определен и равен арифметическому значению корня $\sqrt{a \cdot b}$. Выяснить, какие из основных семи свойств имеют место. Имеются ли единица и нуль? Какие из элементов R являются идемпотентами?

2.2.11. Пусть M есть множество точек плоскости. Заданы два вещественных числа φ и λ, где $0 < \varphi < 2\pi$ и $\lambda > 0$. В M определено следующее действие. Результат $a \circ b = c$ определен для любой пары точек $a, b \in M$. При этом точка c расположена так, что расстояние от a до c равно расстоянию от a до b, умноженному на λ, и при $a \neq b$ угол между направлением от a к b и между направлением от a к c равен φ (угол отсчитывается против движения часовой стрелки).

Выяснить, какие из основных семи свойств имеют место.

2.2.12. Пусть M есть множество направленных отрезков на плоскости, т. е. пар точек (a, b). Действие в M задано следующим образом: для (a, b) и (c, d) результат определен, если конец первого отрезка b совпадает с началом второго c, при этом

$$(a, b) \circ (b, d) = (a, d).$$

Выяснить геометрический смысл действия. Какие из основных семи свойств имеют место?

2.2.13. Пусть действие в множестве задано таблицей Кэли. Как по этой таблице можно непосредственно судить, обладает ли действие каким-либо из свойств:

1) неограниченной применимости;
2) коммутативности;
3) обратимости слева;
4) обратимости справа;
5) сократимости слева;
6) сократимости справа?

2.2.14. Для каких из семи основных свойств действий можно утверждать, что если оно имеет место в M, то обязательно будет иметь место и во всяком $N \subset M$ относительно того же действия?

2.2.15. Пусть в каждом из множеств последовательности

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset M_{n+1} \subset \ldots$$

определено действие $\underset{n}{\circ}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. При этом для $x, y \in M_n$ определено и имеет место $x \underset{m}{\circ} y = z$ $(m \geqslant n)$ тогда и только тогда, когда в M_n определено $x \underset{n}{\circ} y$ и $x \underset{n}{\circ} y = z$, $z \in M_n$. В множестве $M = \bigcup\limits_n M_n$ определяем действие $\circ$, полагая $x \circ y = z$ $(x, y, z \in M)$, если найдется такое n, что $x, y, z \in M_n$ и $x \underset{n}{\circ} y = z$.

Доказать, что такое правило действительно определяет действие в M.

Доказать, что если все действия $\underset{n}{\circ}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ обладают одним из основных свойств, то и $\circ$ в M будет обладать этим свойством.

2.2.16.Т. Пусть P есть совокупность всех подмножеств некоторого непустого множества Ω (в частности, в P включается и пустое множество). Выяснить, какими из основных семи свойств обладает в P действие объединения множеств и какими действие пересечения.

2.2.17. В множестве всевозможных последовательностей из n вещественных чисел рассматривается действие, согласно которому

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \circ (b_1, b_2, \ldots, b_n) =$$
$$= (a_1 + b_1, a_1 + a_2 + b_1 + b_2, \ldots,$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Выяснить, какими из основных семи свойств обладает это действие.

2.2.18.Т. Пусть дано некоторое семейство множеств M_ξ $(\xi \in \Sigma)$, в каждом из которых определено действие,

обозначаемое одним и тем же знаком $\circ$. Декартово произведение (см. гл. I, § 1) этих множеств

$$M = \prod_{\xi \in \Sigma} \times M_\xi$$

рассматривается относительно следующего действия. Для $(x_\xi)_\Sigma$ и $(y_\xi)_\Sigma$ результат определен, если в каждом M_ξ определено $x_\xi \circ y_\xi$. В этом случае

$$(x_\xi)_\Sigma \circ (y_\xi)_\Sigma = (x_\xi \circ y_\xi)_\Sigma.$$

Доказать, что если в каждом из M_ξ действие обладает одним из основных семи свойств, то и в M действие будет обладать соответствующим свойством.

§ 3. Умножение подмножеств мультипликативного множества

Если в множестве M определено неограниченно применимое действие, для которого употребляется мультипликативная запись, то M, рассматриваемое относительно этого действия, мы будем называть *мультипликативным множеством.*

Пусть A и B — два подмножества мультипликативного множества M. Их произведением AB называется множество всех таких элементов z из M, которые могут быть представлены в виде $z = xy$, где $x \in A$, $y \in B$.

Говорят, что непустое подмножество $A \subset M$ *замкнуто* относительно умножения (употребляют также термин «стационарно»), если $AA \subset A$.

A называется *левым идеалом*, если $MA \subset A$;

A называется *правым идеалом*, если $AM \subset A$;

A называется *двусторонним идеалом*, если оно является одновременно и левым и правым идеалом.

Если A является левым или правым идеалом (в частности, двусторонним), то A называют *идеалом.*

Однако надо иметь в виду, что в литературе идеалами иногда называют лишь двусторонние идеалы. В случае коммутативного умножения понятия левого идеала, правого идеала, двустороннего идеала и идеала, очевидно, совпадают.

2.3.1. Пусть R — мультипликативное множество всех рациональных чисел, Z — множество всех целых чисел, P — множество всех положительных рациональных чисел, N — множество всех отрицательных чисел. Найти произведения множеств:

$$RR,\ RZ,\ ZR,\ ZZ,\ PP,\ PN,\ NN.$$

2.3.2. В мультипликативном множестве M действие задано таблицей умножения:

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	b	b	b

Найти $(MM)M$ и $M(MM)$.

2.3.3. Пусть K_1, K_2, K_3, K'_1, K'_2 — подмножества мультипликативного множества M, причем $K'_1 \subset K_1$ и $K'_2 \subset K_2$. Доказать, что

1) $K_1(K_2 \cup K_3) = K_1K_2 \cup K_1K_3$;
2) $K_1(K_2 \cap K_3) \subset K_1K_2 \cap K_1K_3$;
3) $K'_1K'_2 \subset K_1K_2$.

2.3.4. Пусть M — мультипликативное множество и M^* — совокупность всех его непустых подмножеств. M^* само рассматриваем как мультипликативное множество относительно действия умножения подмножеств мультипликативного множества M. Пусть действие в M обладает каким-либо из следующих основных свойств: ассоциативностью, коммутативностью, наличием левых единиц, наличием правых единиц, наличием левых нулей, наличием правых нулей. Доказать, что тогда и действие в M^* будет обладать соответствующим свойством.

2.3.5. Пусть M — мультипликативное множество всех рациональных положительных чисел, M^* — мультипликативное множество его непустых подмножеств (см. 2.3.4). Доказать, что действие в M^* не обладает ни одним из свойств: сокращения слева, сокращения справа, обратимости слева, обратимости справа.

Примечание. Учесть, что само M всеми упомянутыми свойствами обладает. Результат сопоставить с результатами 2.3.4.

2.3.6. Доказать, что всякий идеал мультипликативного множества замкнут относительно умножения.

2.3.7. Пусть M — мультипликативное множество всех натуральных чисел; A — множество всех четных натуральных чисел; B — множество всех нечетных; C_n — множество всех натуральных чисел, меньших или равных n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; D_n — множество всех натуральных чисел, бо́льших или равных n.

Выяснить, какие из следующих множеств:

$$A,\ B,\ C_n,\ D_n,\ C_n \cap D_m\ (n,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

замкнуты относительно умножения, какие являются идеалами.

2.3.8. В мультипликативном множестве всех комплексных чисел будут ли замкнутыми и являются ли идеалами множество всех вещественных чисел и множество всех чисто мнимых чисел (т. е. чисел вида bi, где b — вещественное число, отличное от нуля)?

2.3.9. В мультипликативном множестве всех вещественных квадратных матриц порядка n будут ли замкнутыми и являются ли идеалами множество всех неособенных матриц и множество всех особенных матриц?

2.3.10. Доказать, что пересечение любого множества замкнутых подмножеств мультипликативного множества, если только оно не пусто, само замкнуто.

2.3.11. Доказать, что пересечение любого множества левых идеалов, если оно не пусто, само является левым идеалом. То же для правых идеалов и двусторонних идеалов.

2.3.12.У. Пусть L — левый идеал и R — правый идеал мультипликативного множества. Доказать, что пересечение $L \cap R$ всегда не пусто.

2.3.13.У. Доказать, что пересечение конечного множества двусторонних идеалов само является двусторонним идеалом.

2.3.14. Доказать, что объединение любого множества левых идеалов мультипликативного множества само является левым идеалом.

То же для правых и двусторонних идеалов.

2.3.15. Пусть T_1 и T_2 являются двусторонними идеалами мультипликативного множества M. Доказать, что T_1T_2 замкнуто относительно умножения.

2.3.16. В мультипликативном множестве M, состоящем из пяти элементов a, b, c_1, c_2, d, действие задано таблицей умножения:

	a	b	c_1	c_2	d
a	a	a	a	a	b
b	a	a	a	a	a
c_1	a	a	a	a	a
c_2	a	a	a	a	a
d	b	a	a	a	a

Выяснить, будут ли идеалами множества $T_1 = \{a, b, c_1\}$, $T_2 = \{a, b, c_2\}$, $T_1 T_2$.

2.3.17. Выяснить, когда множество $\{z\}$, состоящее из одного элемента z мультипликативного множества M, является замкнутым, когда левым идеалом, когда правым, когда двусторонним.

2.3.18.У. Определить количество двусторонних идеалов в мультипликативном множестве всех комплексных квадратных матриц порядка n.

§ 4. Гомоморфизмы

Отображение φ мультипликативного множества M_1 в мультипликативное множество M_2 называется *гомоморфизмом*, если для любых $x, y \in M_1$ в M_2 выполняется равенство

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Взаимно однозначное отображение φ, являющееся гомоморфизмом, называется *изоморфизмом.*

Отметим, что при гомоморфизме (и, в частности, при изоморфизме) $\varphi(M_1)$ не обязано совпадать со всем M_2, оно может быть и собственным подмножеством M_2.

Если $\varphi(M_1) = M_2$, то гомоморфизм φ в литературе иногда называют *эпиморфизмом.* Если же гомоморфизм φ является взаимно однозначным отображением, т. е. $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, если $x \neq y$, то его называют иногда *мономорфизмом.*

Гомоморфизму φ мультипликативного множества M_1 в мультипликативное множество M_2 соответствует бинарное отношение ρ_φ в множестве M_1, согласно которому $x \sim y\ (\rho_\varphi)$ имеет место тогда и только тогда, когда в M_2 выполнено $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Легко видеть, что ρ_φ является эквивалентностью. Как мы уже знаем (см. гл. 1, § 3), на другом языке это означает, что гомоморфизму φ соответствует разбиение множества M_1. Каждый класс этого разбиения состоит из множества всех элементов M_1, отображающихся при φ в один и тот же элемент из M_2.

Некоторая эквивалентность σ в мультипликативном множестве M (так же как и соответствующее ей разбиение) называется *стабильной слева*, если из $u \sim v\ (\sigma)$ $(u, v \in M)$ всегда следует $xu \sim xv\ (\sigma)$ при любом $x \in M$. Эквивалентность σ *стабильна справа*, если из $u \sim v\ (\sigma)$ всегда следует $ux \sim vx\ (\sigma)$ при любом $x \in M$.

Если σ стабильна и слева и справа, то говорят, что σ *двусторонне стабильна.* Двусторонне стабильные эквивалентности в литературе часто называют *конгруэнциями.* Вместо термина стабильный иногда говорят *регулярный.*

Пусть τ — некоторое разбиение мультипликативного множества M, обладающее тем свойством, что для любых двух τ-классов K и K' существует такой τ-класс K'' (причем, очевидно, единственный), что $KK' \subseteq K''$. (K и K' перемножаются согласно правилу

перемножения подмножеств мультипликативного множества, см. § 3.) Тогда в множестве всех τ-классов, т. е. в M/τ, можно ввести действие умножения, полагая

$$K \cdot K' = K'',$$

относительно которого M/τ само оказывается мультипликативным множеством. Оно называется *мультипликативным фактор-множеством* мультипликативного множества M по разбиению (или по эквивалентности) τ.

Надо иметь в виду, что умножение τ-классов как элементов мультипликативного фактор-множества M/τ не совпадает с их умножением как подмножеств мультипликативного множества M, поскольку в M возможно $KK' \subset K''$, но $KK' \neq K''$.

2.4.1. Пусть Z — мультипликативное множество всех комплексных чисел; R — мультипликативное множество всех вещественных чисел; φ_1 — отображение Z в R, согласно которому для каждого $z \in Z$

$$\varphi_1(z) = |z|;$$

φ_2 — отображение Z в R, согласно которому

$$\varphi_2(z) = |z| + 1;$$

φ_3 — отображение Z в R, согласно которому

$$\varphi_3(z) = 0;$$

φ_4 — отображение Z в R, согласно которому

$$\varphi_4(z) = 2.$$

Выяснить, какие из отображений φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 являются гомоморфизмами.

2.4.2. Пусть R — мультипликативное множество всех рациональных чисел. Найти все гомоморфизмы R в себя такие, чтобы $\varphi(R) \subset \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

2.4.3. Пусть M — мультипликативное множество всех комплексных матриц порядка $n > 1$, Z — мультипликативное множество всех комплексных чисел. Определим отображения φ_1, φ_2, φ_3 множества M в Z, полагая

$$\varphi_1(a) = \det a;$$
$$\varphi_2(a) = a_{11};$$
$$\varphi_3(a) = 1,$$

где $\det a$ — определитель матрицы a; a_{11} — элемент первой строки и первого столбца матрицы a. Выяснить, какие из отображений φ_1, φ_2, φ_3 являются гомоморфизмами.

2.4.4.Т. Пусть φ — изоморфизм мультипликативного множества M_1 на мультипликативное множество M_2. Доказать, что M_1 и M_2 изоморфны в смысле § 1.

2.4.5.Т. Пусть мультипликативные множества M_1 и M_2 изоморфны в смысле § 1. Доказать, что тогда найдется изоморфизм M_1 на M_2.

Примечание. Сопоставьте результаты 2.4.4 и 2.4.5.

2.4.6. Пусть φ — изоморфизм мультипликативного множества M_1 на мультипликативное множество M_2. Доказать, что обратное отображение φ^{-1} (см. гл. 1, § 2) будет изоморфизмом M_2 на M_1.

2.4.7. Для мультипликативного множества всех целых чисел вида 5^n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) найти все гомоморфизмы его в себя. Выяснить, какие из них являются изоморфизмами.

2.4.8. Пусть φ — гомоморфизм мультипликативного множества M_1 на мультипликативное множество M_2. Пусть M_1 обладает каким-либо из основных свойств: ассоциативностью, коммутативностью, обратимостью слева, обратимостью справа, наличием левых единиц, наличием правых единиц. Доказать, что тогда и M_2 будет обладать соответствующим свойством.

2.4.9. Пусть M_1 — мультипликативное множество всех целых положительных чисел, M_2 — мультипликативное множество, состоящее из двух чисел $\{0; 1\}$. Доказать, что отображение φ мультипликативного множества M_1 на M_2, согласно которому

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(n) = 0 \qquad (n > 1),$$

является гомоморфизмом.

Примечание. Обратить внимание, что в коммутативном мультипликативном множестве M_1 действие обладает свойством сократимости, тогда как в M_2 это свойство не имеет места. Результат сравнить с результатами 2.4.8.

2.4.10. Какому условию должно удовлетворять мультипликативное множество M_0, чтобы для всякого мультипликативного множества M нашелся гомоморфизм M в M_0?

2.4.11. Пусть σ есть некоторое отношение эквивалентности в мультипликативном множестве M. Доказать, что для двусторонней стабильности σ необходимо и достаточно выполнение

условия: из $x_1 \sim y_1(\sigma)$ и $x_2 \sim y_2(\sigma)$ $(x_1, y_1, x_2, y_2 \in M)$ должно всегда следовать $x_1x_2 \sim y_1y_2(\sigma)$.

2.4.12. В мультипликативном множестве M с действием, определенным таблицей умножения

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

определено бинарное отношение σ, согласно которому

$$a \sim b(\sigma), \qquad b \sim c(\sigma),$$
$$a \sim a(\sigma), \qquad b \sim b(\sigma), \qquad c \sim c(\sigma).$$

Доказать, что для любых $x, y, z \in M$ из $x \sim y(\sigma)$ всегда следует $xz \sim yz(\sigma)$ и $zx \sim zy(\sigma)$. Найти такие $x_1, y_1, x_2, y_2 \in M$, что $x_1 \sim y_1(\sigma)$ и $x_2 \sim y_2(\sigma)$, но не имеет места $x_1x_2 \sim y_1y_2(\sigma)$.

Примечание. Результат сопоставить с результатом 2.4.11.

2.4.13. Пусть M — множество всех ненулевых комплексных полиномов, рассматриваемое относительно обычного умножения полиномов, Z — мультипликативное множество всех комплексных чисел. Для нижеследующих отображений φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 мультипликативного множества M в Z выяснить, какие из них будут гомоморфизмами, и описать разбиения M, соответствующие этим гомоморфизмам:

$$F = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0),$$

1) $\varphi_1(F) = a_0$;

2) $\varphi_2(F) = \bar{a}_0$ (где $\bar{a}_0$ — комплексное число, сопряженное с a_0);

3) $\varphi_3(F) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$;

4) $\varphi_4(F) = a_0 + a_n$;

5) $\varphi_5(F) = |a_n|$;

6) $\varphi_6(F) = c^n$ (где c — произвольное отличное от нуля вещественное число).

2.4.14.Т. Пусть τ — некоторое разбиение в мультипликативном множестве M. Для того чтобы существовало мультипликативное фактор-множество M/τ (т. е. чтобы было выполнено свойство разбиения, указанное во введении при опреде-

лении фактор-множества), необходимо и достаточно, чтобы τ было двусторонне стабильным. Доказать.

2.4.15. В мультипликативном множестве R всех рациональных чисел разбиение ρ состоит из трех классов: R^+ состоит из всех положительных чисел, R^- из всех отрицательных, R^0 из одного числа 0. Доказать, что ρ двусторонне стабильно. Построить таблицу умножения для мультипликативного фактор-множества R/ρ.

2.4.16.Т. Пусть T — двусторонний идеал мультипликативного множества M. Обозначим через ρ_T разбиение M, в котором T является одним ρ_T-классом, а все прочие ρ_T-классы состоят каждый из одного элемента M, не принадлежащего T. Доказать, что ρ_T является двусторонне стабильным.

Примечание. Разбиение (и соответственно эквивалентность) такого типа обычно называется *идеальным*. Соответствующее фактор-множество, помимо M/ρ_T, часто обозначается через M/T и называется *идеальным фактор-множеством*.

2.4.17. В мультипликативном множестве M вещественных чисел вида 2^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ через T_k обозначается подмножество, состоящее из чисел 2^n, у которых $n \geqslant k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Доказать, что T_k является идеалом. Построить таблицу умножения для мультипликативных фактор-множеств M/T_1, M/T_2 и M/T_3.

2.4.18.Т. Пусть ρ — двусторонне стабильная эквивалентность в мультипликативном множестве M. Определяем отображение φ множества M в M/ρ, полагая для каждого $x \in M$ в качестве $\varphi(x)$ тот ρ-класс из M/ρ, который содержит элемент x. Доказать, что φ есть гомоморфизм и что эквивалентность ρ_φ, соответствующая этому гомоморфизму, совпадает с ρ:

$$\rho_\varphi = \rho.$$

В каких случаях φ оказывается изоморфизмом?

Примечание. Описанный гомоморфизм φ часто называют *естественным гомоморфизмом* мультипликативного множества M, соответствующим эквивалентности ρ.

2.4.19.Т. Пусть φ — гомоморфизм мультипликативного множества M_1 в мультипликативное множество M_2 и ρ_φ — эквивалентность в M_1, соответствующая гомоморфизму φ. Доказать, что эквивалентность ρ_φ двусторонне стабильна.

2.4.20.Т. Пусть φ — гомоморфизм мультипликативного множества M_1 на мультипликативное множество M_2. Эквивалентность ρ_φ в M_1 соответствует гомоморфизму φ. Доказать, что мультипликативные множества M_1/ρ_φ и $M_2 = \varphi M_1$ изоморфны.

Примечание. Результаты 2.4.18, 2.4.19 и 2.4.20 в совокупности означают, что если не делать различия между изоморфными мультипликативными множествами, то все гомоморфизмы мультипликативного множества M на различные мультипликативные множества ограничиваются естественными гомоморфизмами, соответствующими различным двусторонне стабильным эквивалентностям M (см. 2.4.18).

2.4.21. Определить число и найти все двусторонне стабильные эквивалентности в мультипликативном множестве, действие в котором задано таблицей:

	a	b	c	d
a	b	a	b	b
b	b	b	b	b
c	b	b	b	b
d	b	b	b	b

2.4.22.У. Сколько существует неизоморфных между собою мультипликативных множеств таких, что мультипликативное множество из задачи 2.4.21 обладает гомоморфизмом на них?

§ 5. Полугруппы

Если в множестве определено действие, обладающее свойствами неограниченной применимости и ассоциативности, то такое множество, рассматриваемое относительно этого действия, называется *полугруппой.*

Таким образом, при обычной мультипликативной записи, как правило, применяемой в последующем изложении, полугруппа есть мультипликативное множество с ассоциативным умножением.

Пусть K — некоторое подмножество полугруппы A. Конечная последовательность элементов из K, написанных рядом без каких-либо разделяющих их знаков, называется *словом* над K:

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \in K).$$

Производя в той или иной последовательности перемножения пар соседних элементов в слове, мы можем, постепенно уменьшая длину слова (т. е. число n), через конечное число шагов преобразовать слово в один элемент, принадлежащий A (конечно, он не

обязательно будет принадлежать K). Полученный элемент называется *значением* данного слова в A. В произвольном мультипликативном множестве значение слова будет зависеть от того, в какой последовательности, между какими парами элементов производятся действия, так как различные процессы нахождения значения слова могут привести к различным результатам. Так, уже слово вида

$$x_1x_2x_3$$

при отсутствии ассоциативности может иметь два разных значения, а именно:

$$(x_1x_2)\,x_3, \qquad x_1\,(x_2x_3).$$

В полугруппе всякое слово имеет лишь единственное значение (см. 2.5.1). Поэтому, когда пишется слово

$$x_1x_2\,\ldots\,x_{n-1}x_n,$$

то без каких-либо дополнительных пояснений под ним обычно понимают его значение, являющееся элементом из A. Элемент вида

$$\underbrace{xx\,\ldots\,xx}_{n}$$

обозначают коротко через x^n.

Для $K \subset A$ множество всех элементов, являющихся значениями различных слов над K, обозначается через $[K]_s$, а чаще просто через $[K]$ без дополнительного знака s. Если $K = \{x, y, z, \ldots\}$, то вместо $[\{x, y, z, \ldots\}]_s$ обычно пишут просто $[x, y, z, \ldots]_s$. Множество K называется *порождающим* для $[K]$ относительно действия в A. Частным случаем является порождающее множество самой полугруппы: $[K]_s = A$. При этом, если никакое собственное подмножество $K' \subset K\,(K' \neq K)$ уже не является порождающим для A, т. е. $[K']_s \neq A$, то K называется *неприводимым* порождающим множеством A.

Полугруппа, обладающая порождающим множеством, состоящим из одного элемента, называется *моногенной* (или *циклической*).

Непустое подмножество полугруппы, замкнутое относительно действия, называется *подполугруппой*. Очевидно, подполугруппа сама является полугруппой относительно действия, определенного в полугруппе. Обратно, всякое подмножество полугруппы, являющееся полугруппой, будет подполугруппой.

Элемент a полугруппы A называется *регулярным*, если в A существует такой $x \in A$, что

$$axa = a.$$

Если все элементы полугруппы A являются регулярными, то полугруппа A сама называется *регулярной*.

Непустое подмножество K полугруппы A называется *нормальным комплексом*, если для всяких $k, k' \in K$ и $a, b \in A$ из $akb \in K$ всегда следует $ak'b \in K$, из $ak \in K$ следует $ak' \in K$ и из $kb \in K$ следует $k'b \in K$.

2.5.1.Т.У. Доказать, что в полугруппе любое слово обладает единственным значением (т. е. в какой бы последовательности мы ни совершали перемножение пар соседних элементов в данном слове, мы всегда в конце концов придем к одному и тому же элементу).

2.5.2. Доказать, что для любого элемента a полугруппы A имеют место соотношения:

$$(a^n)^m = a^{nm}, \qquad a^n a^m = a^{n+m}$$

при любых натуральных n и m.

2.5.3. В мультипликативной полугруппе всех натуральных чисел найти такое порождающее множество, которое содержится во всяком другом порождающем множестве этой полугруппы (т. е. является универсально минимальным порождающим множеством).

2.5.4. В мультипликативной полугруппе всех целочисленных квадратных матриц второго порядка для

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

найти $[x]$, $[x, t]$, $[y, z]$, $[y, t]$.

2.5.5. Доказать, что для любого непустого подмножества K полугруппы A множество $[K]_s$ является подполугруппой.

2.5.6. Доказать, что $[K]_s$ есть пересечение всех подполугрупп полугруппы A, содержащих K.

2.5.7. Доказать, что при любых $K, K' \subset A$ имеет место

$$[K \cup [K']_s]_s = [K \cup K']_s.$$

2.5.8. Доказать, что в бесконечной моногенной полугруппе $A = [x]_s$ ни при каких $n \neq m$ невозможно $x^n = x^m$.

2.5.9. Доказать, что всякие две бесконечные моногенные полугруппы изоморфны.

2.5.10 Пусть в моногенной полугруппе $A = [x]_s$ для некоторых натуральных чисел p и q $(p \neq q)$ имеет место $x^p = x^q$. Доказать, что:

1) A конечна;

2) найдутся такие натуральные числа h и d, что $x^{h+d} = x^h$, причем $A = \{x, x^2, \ldots, x^{h+d-1}\}$ и все элементы $x, x^2, \ldots$ $\ldots, x^{h+d-1}$ различны;

3) указанная пара чисел (h, d) для данной полугруппы единственна;

4) равенство $x^{n+m} = x^n$ имеет место тогда и только тогда, когда $n \geqslant h$ и m делится на d.

Примечание. Указанная пара чисел (h, d) называется *типом* моногенной полугруппы $[x]_s$, а также типом самого элемента x. Если $[x]_s$ бесконечна, то говорят, что ее тип и тип элемента x бесконечен.

2.5.11. Доказать, что две конечные моногенные полугруппы изоморфны тогда и только тогда, когда их типы одинаковы.

2.5.12. Определить число всех подполугрупп и число идеалов в моногенной полугруппе типа (5, 3).

2.5.13. Каков тип (h, d) конечной моногенной полугруппы, если она обладает $(h + d - 2)$ порождающими множествами, состоящими каждое из одного элемента?

2.5.14. Доказать, что для двусторонних идеалов T_1 и T_2 полугруппы A произведение $T_1 T_2$ всегда является двусторонним идеалом.

Примечание. Результат сравните с 2.3.16.

2.5.15. В множестве, состоящем из элементов

$$0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\qquad b_{11},\ b_{12},\ \ldots,\ b_{ij},\ \ldots,\ b_{nn},$$

определено действие умножения, согласно которому

$$a_i a_j = b_{ij},$$

а во всех остальных случаях $xy = 0$.

Доказать, что A является полугруппой.

Описать типы всех ее моногенных подполугрупп.

Выяснить, какие подмножества A являются ее левыми, правыми и двусторонними идеалами.

2.5.16.У. Доказать, что для регулярного элемента полугруппы a всегда найдется такой элемент $\bar{a}$, что

$$a\bar{a}a = a,\quad \bar{a}a\bar{a} = \bar{a}.$$

Примечание. Элементы a и $\bar{a}$, связанные указанными соотношениями, называются *регулярно сопряженными*.

2.5.17. В множестве всевозможных четверок целых чисел определено действие

$$(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4) = (p_1,\ p_2,\ q_3,\ q_4).$$

Доказать ассоциативность действия. Выяснить, какие элементы в получающейся полугруппе будут регулярными. Найти все регулярно сопряженные с каждым регулярным элементом.

2.5.18.Т. Пусть φ — гомоморфизм полугруппы A в полугруппу B; z — произвольный элемент из B. Совокупность всех элементов $x \in A$ таких, что $\varphi x = z$, обозначим через K_z. Доказать, что K_z, если оно непусто, является нормальным комплексом полугруппы A.

2.5.19.Т.У. Пусть K — нормальный комплекс полугруппы A. Доказать, что существуют такая полугруппа B и такой гомоморфизм φ полугруппы A на B, что для некоторого $z \in B$ множество K является совокупностью всех таких $x \in A$, что $\varphi x = z$.

2.5.20. Каково должно быть подмножество K полугруппы A, чтобы существовал гомоморфизм φ полугруппы A на некоторую полугруппу B, обладающую идемпотентом z, при котором K есть совокупность всех таких $x \in A$, что $\varphi(x) = z$?

2.5.21. Найти все нормальные комплексы моногенной полугруппы типа (3,2).

2.5.22. Доказать, что в коммутативной полугруппе, обладающей идемпотентами, множество всех идемпотентов является подполугруппой.

2.5.23.У. Доказать, что всякая конечная полугруппа обладает идемпотентами.

2.5.24. Доказать, что конечная коммутативная полугруппа всегда обладает единственным разбиением, каждая компонента которого является подполугруппой с одним идемпотентом. Показать, что каждая компонента этого разбиения является нормальным комплексом.

2.5.25. Каждая регулярная полугруппа обладает идемпотентами. Количество идемпотентов в регулярной полугруппе равно одному тогда и только тогда, когда в ней выполнено условие двусторонней обратимости. Доказать.

2.5.26. Если в полугруппе имеется левая единица и выполнено условие обратимости слева, то имеет место свойство двусторонней обратимости. Доказать. Аналогично для правой единицы и обратимости справа.

2.5.27.Т. Если бесконечная полугруппа обладает конечным или счетным порождающим множеством, то она сама счетна. Доказать.

§ 6. Первоначальные понятия теории групп

Алгебраической группой или, как чаще говорят, просто *группой* называется множество, рассматриваемое относительно некоторого заданного в нем действия, которое обладает свойствами:

1) неограниченной применимости;
2) ассоциативности;
3) двусторонней обратимости.

Таким образом, группа есть полугруппа со свойством двусторонней обратимости.

При рассмотрении групп общего типа в соответствии со сказанным ранее чаще всего употребляется мультипликативная запись и терминология, обычно даже без специального пояснения. В дальнейшем мы также будем следовать этому обычаю.

Следует, однако, указать, что некоторые авторы иногда предпочитают аддитивную запись (особенно при изучении групп со свойством коммутативности).

Как будет показано в 2.6.1, в группе G существует единичный элемент, который мы будем обозначать через e_G или через e (нередко единичный элемент обозначается через 1). При этом единичный элемент в G согласно 2.2.4 единствен. Каждый элемент x группы обладает обратным, который мы будем обозначать через x^{-1}. Обратный элемент для всякого x единствен (см. 2.6.1). Для элементов группы, как и в общих полугруппах, употребляется обозначение степени x^n для любого натурального числа n. Кроме того, в группе употребляется обозначение

$$(x^{-1})^n = x^{-n}.$$

Далее, при любом элементе группы x под x^0 всегда понимается единичный элемент группы.

Если в группе выполняется свойство коммутативности, то группа называется *коммутативной* или *абелевой* (последний термин употребляется чаще).

Хотя в общем случае группа G не обязана быть коммутативной, в ней могут существовать такие элементы z, которые перестановочны со всяким элементом группы $x \in G$:

$$xz = zx.$$

Совокупность всех таких элементов Z называется *центром* группы G. Если центр группы G состоит не менее чем из двух элементов (см. 2.6.32), то говорят, что группа G обладает нетривиальным центром.

Непустое подмножество H группы G называется ее *подгруппой*, если H замкнута относительно действия в G и если для всякого элемента x из H обратный к нему элемент x^{-1} также принадлежит H (последнее условие можно было бы сформулировать как замкнутость H относительно операции взятия обратного элемента). Если $H \neq G$ и $H \neq e_G$, то H называют *собственной* подгруппой.

Подгруппа H группы G называется *нормальной* или, как чаще говорят, *нормальным делителем* G, если для любых $a \in G$ и $x \in H$ всегда имеет место

$$a^{-1}xa \in H.$$

Особая роль нормальных делителей будет выяснена в гл. IV.

Если подгруппа H конечна, то число ее элементов называют *порядком* данной подгруппы. Если H бесконечна, то говорят также, что H имеет бесконечный порядок. Так как сама группа, очевидно, является своей подгруппой, то согласно сказанному порядком конечной группы называется число ее элементов; бесконечная группа называется также группой бесконечного порядка.

Пусть K — некоторое непустое подмножество группы G. Множество всех элементов G, представимых в виде произведения

$$x_1x_2 \ldots x_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где каждый x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ или принадлежит K или является обратным для некоторого элемента из K, называется *порожденным множеством* K в смысле теории групп и обозначается через $[K]_g$; само K называется для $[K]_g$ *порождающим множеством* в смысле теории групп. Если $[K]_g = G$, то K называется порождающим множеством группы G в смысле теории групп. Если при этом никакое собственное подмножество K не порождает G, то K называется *неприводимым* порождающим множеством в смысле теории групп. Если группа обладает *конечным порождающим* множеством, то она называется *конечно порожденной*. Следует иметь в виду, что в литературе по теории групп вместо термина *порождающее множество группы* (в смысле теории групп) часто употребляют термин *система образующих*.

Следует отметить, что, рассматривая группу как полугруппу (очевидно, всякая группа является полугруппой), мы в отдельных случаях вполне можем иметь

$$[K]_g \neq [K]_s.$$

Непосредственно ясно, что всегда имеет место

$$[K]_g = [K \cup K']_s,$$

где K' — множество всех элементов G, обратных для элементов из K.

В том случае, когда происходит рассмотрение групп без привлечения понятий из теории полугрупп, в термине «множество, порождающее в смысле теории групп» последние слова обычно опускаются, также опускают значок g и пишут просто $[K]$ вместо $[K]_g$. В главах, целиком посвященных группам, мы также будем поступать подобным образом.

Следует отметить, что в литературе вместо $[K]$ чаще пишут $\{K\}$. Мы не будем употреблять этого обычного в теории групп обозначения ввиду того, что такое использование фигурных скобок противоречит принятому их употреблению в общей теории множеств.

Если в подгруппе H группы G найдется такой элемент x, что $H = [x]_g$, то H называется *циклической подгруппой* группы G, порожденной элементом x. Если $H = G$, то G называется *циклической группой*.

Пусть x — произвольный элемент группы G. Если существуют такие натуральные числа n, что $x^n = e_G$, то наименьшее из них называется *порядком элемента* x. Если таких натуральных чисел нет, то говорят, что порядок x бесконечен.

Если все элементы группы имеют конечные порядки, то группа называется *периодической.*

Связь понятия порядка элемента с понятием порядка подгруппы будет установлена ниже (2.6.9).

2.6.1.Т. Доказать, что множество G относительно определенного в нем действия будет группой тогда и только тогда, когда действие обладает свойствами:

1) неограниченной применимости;

2) ассоциативности;

3) существования двусторонней единицы e;

4) существования для каждого элемента $x \in G$ обратного элемента (т. е. такого элемента $x^{-1} \in G$, что $xx^{-1} = x^{-1}x = e$).

При этом каждый элемент группы обладает лишь единственным обратным. Доказать.

Примечание. Система указанных четырех условий чаще всего и принимается в качестве определения группы. Существуют многочисленные другие эквивалентные определения (см., например, 2.5.25 и 2.5.26).

2.6.2.Т. Пусть φ — гомоморфизм группы G на мультипликативное множество M. Доказать, что M есть группа; φe_G есть единица группы $M = \varphi G$; при любом $x \in G$ элемент $\varphi(x^{-1})$ в $M = \varphi G$ является обратным для φx.

2.6.3. В мультипликативном множестве M всех комплексных квадратных матриц n-го порядка выяснить, являются ли группами подмножества, состоящие из следующих матриц:

1) вещественные матрицы из M;

2) неособенные матрицы из M;

3) вещественные неособенные матрицы из M с положительными элементами;

4) неособенные диагональные матрицы из M;

5) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3,\,n-1} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \neq 0);$$

6) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0);$$

7) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6.4. В мультипликативной полугруппе всех вещественных квадратных матриц третьего порядка найти максимальное в отношении включения подмножество M такое, что M является группой и содержит матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6.5.Т. Доказать, что при любых целых числах n и m в группе для всякого элемента x имеет место

$$(x^n)^m = x^{nm}.$$

2.6.6. В мультипликативной группе всех неособенных комплексных матриц второго порядка определить порядки следующих элементов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2+3i & -2+2i \\ 1-i & 3-2i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6.7.Т. Пусть x — элемент конечного порядка n некоторой группы. Доказать, что все элементы

$$x^0 = e, \quad x, x^2, \ldots, x^{n-1}$$

различны между собою и

$$[x]_g = \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}.$$

Для $x^k\,(0 \leqslant k < n)$ имеет место

$$(x^k)^{-1} = x^{n-k}.$$

Элементы группы $[x]_g$, заданные в виде указанных степеней x, можно перемножать по формуле

$$x^k x^l = \begin{cases} x^{k+l} & (\text{если } k+l < n); \\ x^{k+l-n} & (\text{если } k+l \geqslant n), \end{cases}$$

где $0 \leqslant k,\ l < n$ (отметим, что во втором случае, очевидно, $0 \leqslant k+l-n < n$).

2.6.8. Пусть x — элемент бесконечного порядка некоторой группы. Доказать, что при любых целых числах $n \neq m$ имеет место $x^n \neq x^m$.

2.6.9. Пусть x — элемент группы. Доказать, что $[x]_g$ является подгруппой (и по определению циклической), причем ее порядок равен порядку элемента x.

2.6.10. Доказать, что две циклические группы изоморфны тогда и только тогда, когда их порядки равны.

2.6.11. Пусть G — циклическая группа порядка 15. Определить число ее элементов x таких, что

$$[x]_g = G.$$

2.6.12. В циклической группе порядка 20 определить число различных неприводимых порождающих множеств, состоящих из двух элементов каждое.

2.6.13. Пусть для трех элементов группы x, u, v выполняются равенства

$$x = uv = vu,\ u^p = e,\ v^q = e,$$

где p и q — взаимно простые натуральные числа. Доказать, что при некоторых взаимно простых натуральных числах p' и q' имеют место

$$u = x^{p'}, \qquad v = x^{q'}.$$

2.6.14. Пусть порядок элемента группы x есть число pq, где p и q взаимно просты. Доказать, что в группе найдутся такие элементы u и v, для которых выполняются равенства:

$$x = uv = vu,\ u^p = e,\ v^q = e.$$

2.6.15. Пусть для четырех элементов группы u_1, v_1, u_2, v_2 выполняются равенства:

$$u_1v_1 = v_1u_1 = u_2v_2 = v_2u_2,$$
$$u_1^p = u_2^p = v_1^q = v_2^q = e,$$

где p и q — взаимно простые натуральные числа. Доказать, что

$$u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2.$$

2.6.16.У. Пусть порядок элемента группы x равен $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — различные простые числа. Доказать, что тогда найдется единственная совокупность, состоящая из m элементов $y_1, y_2, \ldots, y_m$, такая, что

$$x = y_1y_2 \ldots y_m, \quad y_iy_j = y_jy_i \ (i = 1, 2, \ldots, m),$$
$$y_1^{p_1^{\alpha_1}} = y_2^{p_2^{\alpha_2}} = \ldots = y_m^{p_m^{\alpha_m}} = e.$$

2.6.17. Во всякой группе G подмножество, состоящее из одного единичного элемента e_G, и сама G являются для G подгруппами и даже нормальными делителями. Доказать.

2.6.18.Т. Доказать, что непустое подмножество H группы G само является группой относительно действия, определяемого в H действием в G, тогда и только тогда, когда H — подгруппа группы G.

Пусть e_G — единица группы G и e_H — единица группы H; пусть x' — элемент, обратный к элементу $x \in H$ в группе G. Доказать, что $e_G = e_H$ и что $x' \in H$.

2.6.19.Т. Пусть H — подгруппа группы G и $x \in H$. Доказать, что $xH = Hx = H$.

2.6.20. Пусть K — произвольное непустое подмножество группы. Доказать, что всегда

$$[[K]_g]_g = [K]_g$$

и что равенство

$$[K]_g = K$$

имеет место тогда и только тогда, когда K является подгруппой группы.

2.6.21.Т.У. Пусть $G = [x]_g$ — конечная циклическая группа порядка n. Для натурального числа d, являющегося

делителем n, обозначим через H_d совокупность элементов $x^d, x^{2d}, x^{3d}, \ldots, x^{\left(\frac{n}{d}\right)d} = x^n$. Доказать, что:

1) H_d является подгруппой группы G;

2) если $d_1 \neq d_2$, то $H_{d_1} \neq H_{d_2}$;

3) G не имеет иных подгрупп, кроме подгрупп H_d при всевозможных делителях d числа n.

2.6.22.Т.У. Пусть $G = [x]_g$ — бесконечная циклическая группа. Для целого неотрицательного числа m обозначим через H_m совокупность элементов вида x^{km} $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Доказать, что:

1) H_m является подгруппой группы G;

2) если $m_1 \neq m_2$, то $H_{m_1} \neq H_{m_2}$;

3) G не имеет иных подгрупп, кроме подгрупп H_m.

2.6.23.У. Доказать, что всякая бесконечная группа имеет бесконечное множество подгрупп.

2.6.24.Т.У. Выяснить, каковы группы, у которых множество всех подгрупп:

1) состоит из одной подгруппы;

2) состоит из двух подгрупп;

3) состоит из трех подгрупп.

2.6.25. В мультипликативной группе всех комплексных чисел, отличных от нуля, найти: 1) $[i]_g$; 2) $\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right]_g$; 3) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right]_g$; 4) $\left[-\frac{1}{2} i\right]_g$; 5) $[2, -5]_g$;

6) пересечение указанных выше подгрупп с подгруппой, состоящей из всех вещественных чисел, отличных от нуля.

2.6.26. Пусть в группе G имеем:

$$G \supset H_1 \supset H_2,$$

где H_1 является подгруппой G, а H_2 является подгруппой H_1. Доказать, что H_2 будет подгруппой G.

2.6.27. Доказать, что пересечение любого множества подгрупп группы само является ее подгруппой.

2.6.28. Пусть K есть непустое подмножество группы G. Доказать, что $[K]_g$ есть пересечение множества всех подгрупп группы G, содержащих K.

2.6.29. Выяснить каковы те группы, в которых для любого множества K выполняется равенство

$$[K]_g = [K]_s.$$

2.6.30. Пусть все неединичные элементы группы имеют порядки, равные 2. Доказать, что группа абелева.

2.6.31. Пусть H_1, H_1', H_2, H_2' — некоторые подгруппы группы, причем $H_1 \subset H_1'$ и $H_2 \subset H_2'$. Доказать, что

$$(H_1H_2) \cap H_1' \cap H_2' = (H_1 \cap H_2')(H_1' \cap H_2).$$

2.6.32. Доказать, что центр группы всегда непуст.

2.6.33. В каких группах центр группы совпадает со всей группой?

2.6.34. Доказать, что всякая подгруппа центра группы (в том числе и сам центр) является нормальным делителем группы.

2.6.35.Т. Доказать, что подгруппа H группы G является нормальным делителем тогда и только тогда, когда для любого $x \in G$ выполняется

$$xH = Hx.$$

2.6.36. Пусть H — произвольная подгруппа группы G и N — некоторый ее нормальный делитель. Доказать, что HN является подгруппой G, причем $HN = NH$.

2.6.37. Доказать, что произведение конечного числа и пересечение произвольного множества нормальных делителей группы являются также ее нормальными делителями.

2.6.38. Пусть G — множество всевозможных троек целых чисел вида $(k_1, k_2, 1)$ и $(k_1, k_2, -1)$. В G определено действие умножения по правилу:

$$(k_1, k_2, 1)(l_1, l_2, \varepsilon) = (k_1 + l_1, k_1 + l_2, \varepsilon),$$
$$(k_1, k_2, -1)(l_1, l_2, \varepsilon) = (k_1 + l_2, k_2 + l_1, -\varepsilon),$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Доказать, что G является группой. Доказать, что $H_1 = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]_g$ есть нормальный делитель группы G, а $H_2 = [(1, 0, 1)]_g$ есть нормальный делитель группы H_1.

Выяснить, будет ли H_2 нормальным делителем для G.

Примечание. Сопоставить результат с результатом 2.6.26.

2.6.39. В множестве K, состоящем из восьми элементов: $1, -1, i, j, k, -i, -j, -k$ (здесь знак минус в данный момент не играет никакой другой роли, кроме того, что слу-

жит различительным значком при задании некоторых элементов), задано действие при помощи таблицы умножения:

	1	-1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
1	1	-1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
-1	-1	1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
i	i	$-i$	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
$-i$	$-i$	i	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
j	j	$-j$	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
$-j$	$-j$	j	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
k	k	$-k$	$-j$	j	i	$-i$	1	-1
$-k$	$-k$	k	j	$-j$	$-i$	i	-1	1

Доказать, что K является группой. Найти все ее подгруппы и доказать, что каждая из них является нормальным делителем K.

Примечание. Указанная группа называется *группой кватернионов*. Она играет важную роль в теории так называемых алгебр.

2.6.40.T. Если бесконечная группа обладает конечным или счетным порождающим множеством, то она сама счетная. Доказать.

ГЛАВА III

СУПЕРПОЗИЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 1. Общие свойства суперпозиции преобразований

Пусть Ω — произвольное множество. Всякое отображение множества Ω в себя называется *преобразованием* Ω. Так как преобразование является частным случаем отображения множеств, то здесь мы, естественно, сохраним обозначения и терминологию § 2 гл. I с той разницей, что элементы преобразуемого множества будем, как правило, обозначать малыми греческими буквами, а преобразования — малыми латинскими. В частности, если элементу α при преобразовании u соответствует элемент β, то β будем называть *образом* α и писать $u\alpha = \beta$ или $u(\alpha) = \beta$.

Множество всех преобразований множества Ω будем обозначать T_Ω.

В множестве T_Ω следующим образом вводится действие умножения преобразований (или, как говорят еще, суперпозиции преобразований): пусть $u, v, w \in T_\Omega$, тогда $w = uv$, если для каждого $\alpha \in \Omega$ выполняется равенство $w(\alpha) = u(v\alpha)$.

Если Ω — некоторое множество вещественных чисел, то всякая функция, заданная на Ω, множество значений которой содержится в Ω, является преобразованием множества Ω, а умножение таких преобразований есть обычная суперпозиция функций.

Отметим некоторое различие в обозначениях. Функцию обычно записывают в виде $f(x)$, тогда как для преобразования эта запись обозначает образ элемента x при преобразовании f. Для функций мы сохраним обычное обозначение вида $f(x)$.

Пусть Ω — произвольное множество, $u \in T_\Omega$. Запишем в одной строке все элементы множества Ω, под каждым элементом запишем его образ при преобразовании u:

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots \\ u\alpha, & u\beta, & u\gamma, & \ldots \end{pmatrix}.$$

Полученное выражение будем называть *подстановкой, соответствующей преобразованию* u. Обратно, записывая под каждым эле-

ментом множества Ω некоторый элемент этого же множества, получим таблицу

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \dots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \dots \end{pmatrix},$$

которая, очевидно, является подстановкой для следующего преобразования u множества Ω:

$$u\alpha = \alpha', \qquad u\beta = \beta', \qquad u\gamma = \gamma', \ \dots$$

Если в верхней строке подстановки элементы записать в другом порядке и соответственно изменить порядок элементов в нижней строке, то получим подстановку, которая соответствует тому же преобразованию u. Все подстановки, соответствующие одному и тому же преобразованию u, будем считать равными между собой, отождествлять их с преобразованием u и писать

$$u = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ u\alpha, & u\beta, & u\gamma, & \dots \end{pmatrix}.$$

Запятые в записи подстановки мы, как правило, будем опускать.

Каждое преобразование можно мыслить заданным подстановкой, в том числе и для бесконечных множеств. Но, разумеется, фактическое написание подстановки возможно только в случае конечного преобразуемого множества.

Мощность множества $u\Omega$, т. е. мощность множества всех образов при преобразовании u, будем называть *рангом* преобразования u и обозначать ru.

Преобразование e будем называть *тождественным* или *единичным*, если $e\alpha = \alpha$ для любого $\alpha \in \Omega$. Очевидно, что e — единица T_Ω.

Всякое множество преобразований некоторого множества Ω, которое является полугруппой относительно определенного выше умножения преобразований, будем называть *полугруппой преобразований*.

Отметим еще, что в этом параграфе никакие действия над преобразованиями, кроме введенного выше умножения преобразований, рассматриваться не будут.

Надо иметь в виду, что в некоторых книгах преобразование w, получающееся в результате того, что сначала применено преобразование v, а затем преобразование u (т. е. то, что мы обозначаем $w = uv$), обозначают через vu. Это особенно естественно при записи знаков отображения справа, о чем было сказано в конце введения в § 2 гл. I. Действительно, в этом случае естественно записывать: $\alpha(vu) = (\alpha v)\, u$.

В пределах настоящей книги, учитывая принятую запись знаков отображения слева от преобразуемых элементов, умножение преобразований всегда будет производиться так, как это было описано вначале.

3.1.1.Т. Доказать, что умножение преобразований обладает ассоциативным свойством.

Примечание. Отсюда следует, что T_Ω для любого множества Ω является полугруппой.

3.1.2. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $u, v, w \in T_\Omega$ таковы, что

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 8 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 8 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти uw, wu, v^2u, uw^3, uvw.

Примечание. Обратить внимание на то, что $uw \neq wu$, т. е. что умножение преобразований не обладает коммутативным свойством.

3.1.3. Пусть $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$, $u, v \in T_\Omega$,

$$u = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Найти типы элементов u, v, uv, vu в полугруппе T_Ω.

3.1.4. Пусть Ω — множество всех вещественных чисел. Какими из семи основных свойств обладает действие суперпозиции в каждом из следующих множеств вещественных функций, заданных на Ω:

1) множество всех полиномов;

2) множество всех полиномов четной степени;

3) множество всех полиномов нечетной степени;

4) множество всех полиномов первой степени;

5) множество всех полиномов первой степени со старшими коэффициентами, равными единице;

6) множество степенных функций (т. е. функций вида $f(x) = x^n$ при любом натуральном n)?

3.1.5 Пусть Ω — множество всех вещественных чисел. Для следующих множеств вещественных функций, заданных на Ω, найти нули (левые, правые, двусторонний) относительно действия суперпозиции:

1) множество всех непрерывных функций;

2) множество всех непрерывных функций, тождественных на отрезке $[0, 1]$ (т. е. $f(\alpha) = \alpha$ для любого $\alpha \in [0, 1]$);

3) множество полиномов четной степени;

4) множество полиномов нечетной степени.

3.1.6. Найти все левые нули полугруппы T_Ω при любом множестве Ω и доказать, что эта полугруппа правых нулей не имеет.

3.1.7. Пусть Ω — множество всех вещественных чисел. Какие из следующих множеств вещественных функций, заданных на Ω, образуют полугруппы? Какие из них являются группами:

1) множества, заданные в задаче 3.1.4;

2) множества 1), 2), заданные в задаче 3.1.5;

3) множество всех четных функций $(f(-x)=f(x))$;

4) множество всех нечетных функций $(f(-x)=-f(x))$;

5) множество всех ограниченных функций (для каждой функции $f(x)$ существует число $M_f>0$ такое, что $|f(x)|\leqslant M_f$ при всех x);

6) множество функций, принимающих значение 0 при $x=1$?

3.1.8. Пусть Ω — множество точек плоскости, u — проектирование на данную прямую l, а v — симметрия относительно точки, лежащей на прямой l.

1) Доказать, что преобразования u и v перестановочны.

2) Найти типы элементов u, v в полугруппе T_Ω.

3.1.9. Пусть Ω — множество точек плоскости, u — симметрия относительно прямой l_1, а v — симметрия относительно прямой l_2, параллельной l_1. Доказать, что uv, vu являются параллельными переносами плоскости, и найти векторы переносов.

3.1.10. Доказать, что каждый параллельный перенос плоскости есть произведение двух симметрий относительно параллельных прямых.

3.1.11. Пусть Ω — множество всех вещественных полиномов, u, v, $w_c \in T_\Omega$ (c — любое вещественное число):

$$u[f(x)]=f^2(x),$$

$$v[f(x)]=f'(x),$$

$$w_c[f(x)]=cf(x)\,(f(x)\in\Omega).$$

Выяснить, какие из преобразований u, v, w_c перестановочны между собой.

3.1.12 Пусть $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, $u \in T_\Omega$:

$$u = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_n & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Найти все преобразования $x \in T_\Omega$, перестановочные с u.

3.1.13. Пусть N — множество всех натуральных чисел, $u, v \in T_N$ определены следующим образом:

$$u(n) = n + 1 \ (n \in N),$$
$$v(n) = n - 1 \ (n > 1), \ v(1) = 1 \ (n \in N);$$

1) из каких элементов состоит полугруппа $[u, v]_s$?

2) найти все неприводимые порождающие множества полугруппы $[u, v]_s$.

3.1.14. Пусть N — множество всех натуральных чисел, и пусть

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 & \ldots \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ 1 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Для каждого из элементов u, v найти все регулярно сопряженные с ним элементы:

1) в полугруппе T_Ω;

2) в полугруппе $[u, v]_s$ (см. 2.5.16).

3.1.15. Доказать, что T_Ω есть регулярная полугруппа при любом Ω.

3.1.16. Пусть u — преобразование множества Ω, и пусть ρ_u — бинарное отношение в Ω, определенное следующим образом: $(\alpha, \beta) \in \rho_u$, если $u\beta = \alpha$. Доказать, что:

1) для любых $u, v \in T_\Omega$ справедливо равенство $\rho_u \rho_v = \rho_{uv}$;

2) если $u \neq v$, то $\rho_u \neq \rho_v$;

3) множество всех бинарных отношений ρ_u $(u \in T_\Omega)$ является полугруппой относительно действия умножения бинарных отношений и что эта полугруппа изоморфна T_Ω;

4) ρ_e (e — тождественное преобразование) есть диагональ.

Примечание. Таким образом, преобразования можно рассматривать как частный случай бинарных отношений.

3.1.17. Пусть v — произвольное, u — взаимно однозначное преобразование множества Ω, причем $u\Omega = \Omega$. Доказать, что $r(uv) = r(vu) = rv$.

3.1.18. Доказать, что ранг произведения двух преобразований не превосходит наименьшего из рангов сомножителей.

3.1.19. Пусть Ω — множество всевозможных бесконечных последовательностей вещественных чисел. В полугруппе T_Ω рассматривается подмножество T', состоящее из всех преобразований вида

$$u_{m,n}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) = (m\alpha_1 + n, m\alpha_2 + n, m\alpha_3 + n, \ldots),$$

где m — любое натуральное, а n — любое целое неотрицательное число.

1) Доказать, что T' — полугруппа.

2) Доказать, что совокупность всех преобразований вида $u_{1,0}$, $u_{1,1}$, $u_{p_1,0}$, $u_{p_2,0}$, ..., где p_1, p_2, ... — простые натуральные числа, является неприводимым порождающим множеством T'.

3) Найти все идемпотенты полугруппы T'.

3.1.20. Пусть T' — полугруппа, определенная в предыдущей задаче. Какие из следующих подмножеств T' являются подполугруппами, идеалами (левыми, правыми, двусторонними), нормальными подмножествами:

1) множество M_1 всех $u_{m,n}$, у которых m равно некоторому фиксированному числу $l > 1$;

2) множество M_2 всех $u_{m,n}$, у которых $m = n$;

3) множество M_3 всех $u_{m,n}$, у которых n кратно некоторому фиксированному числу l;

4) множество M_4 всех $u_{m,n}$, у которых m кратно некоторому фиксированному числу l;

5) множество M_5 всех $u_{m,n}$, у которых m, n кратны некоторому фиксированному простому числу p.

3.1.21. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, v, u_1, u_2, $u_3 \in T_\Omega$:

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 8 & 1 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 7 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 6 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Какие из уравнений $u_i x = v$ $(i = 1, 2, 3)$ разрешимы? Сколько решений имеет каждое разрешимое из них?

3.1.22. Пусть u, $v \in T_\Omega$. Для того чтобы уравнение $ux = v$ было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы $u\Omega \supset v\Omega$. Доказать.

3.1.23. Выяснить, для каких пар преобразований $u, v \in T_\Omega$ уравнение $ux = v$ имеет единственное решение.

3.1.24. Пусть N — множество всех натуральных чисел, u_1, u_2, u_3, $v \in T_N$:

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n & \dots \\ 1 & 1 & 3 & 3 & \dots & 2n-1 & 2n-1 & \dots \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 & \dots \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ 2 & 4 & \dots & 2n & \dots \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2n & 2n+1 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & \dots & 2n & 2n & \dots \end{pmatrix}.$$

Какие из уравнений $xu_i = v$ $(i = 1, 2, 3)$ разрешимы, какие из них имеют единственное решение?

3.1.25. Выяснить, для каких пар преобразований u, $v \in T_\Omega$ уравнение $xu = v$ разрешимо. Когда оно имеет единственное решение?

Примечание. Из задач 3.1.22, 3.1.25 следует, что суперпозиция преобразований не обладает свойствами обратимости.

3.1.26.У. Найти условие, при котором:

1) преобразование u является правым делителем тождественного преобразования e в полугруппе T_Ω;

2) преобразование u является левым делителем e в полугруппе T_Ω;

3) преобразование u является идемпотентом.

3.1.27. Пусть Ω — множество вещественных чисел отрезка $[0, 1]$, множество $T' \subset T_\Omega$ состоит из всех преобразований вида:

$$u_c\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi < c, \\ 1, & \text{если } \xi \geqslant c; \end{cases}$$

$$v_c\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi \leqslant c, \\ 1, & \text{если } \xi > c, \end{cases}$$

где c — любое вещественное число из Ω.

1) Доказать, что T' — полугруппа.

2) Описать все идемпотенты полугруппы T'.

3) Найти все левые и все правые идеалы T'.

3.1.28. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Какие из следующих множеств T_Ω являются нормальными подмножествами:

1) множество всех преобразований, ранги которых не превосходят трех;

2) множество всех преобразований ранга 5;

3) множество Q_M всех преобразований ранга 6, обладающих свойствами: для любых $u, v \in Q_M$ выполняется $u\Omega = v\Omega = M$ и $u\alpha_1 = u\alpha_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $v\alpha_1 = v\alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega$, $M \subset \Omega$);

4) множество подстановок

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 3 & 8 & 3 & 8 & 5 & 5 & 1 & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 8 & 3 & 8 & 3 & 1 & 1 & 5 & 8\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 5 & 1 & 5 & 1 & 3 & 3 & 8 & 5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 1 & 5 & 1 & 5 & 8 & 8 & 3 & 1\end{pmatrix};$$

5) множество подстановок

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 3 & 8 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 4 & 4 & 2 & 5 & 8 & 3 & 1 & 7\end{pmatrix}?$$

3.1.29. Пусть a — некоторое вещественное число, A — множество вещественных функций $f(x)$, дифференцируемых в точке a и таких, что $f(a) = a$. Доказать, что:

1) A является полугруппой относительно действия суперпозиции функций;

2) отображение θ, определяемое равенством $\theta[f(x)] = f'(a)$ $(f(x) \in A)$, является гомоморфизмом A в мультипликативную полугруппу вещественных чисел.

3.1.30. Пусть Ω — произвольное множество, n — фиксированное натуральное число. Доказать, что множество J_n всех преобразований из T_Ω, ранги которых меньше n, есть двусторонний идеал полугруппы T_Ω.

3.1.31.У Если J — двусторонний идеал полугруппы T_Ω и $u \in J$, $ru = n$ (n — натуральное число), то J содержит и любое преобразование ранга, не превосходящего n. Доказать.

3.1.32. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Какие из следующих подмножеств T_Ω являются группами:

1) $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 7 & 1 & 1 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 6 & 7 & 7 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 1 & 6 & 6 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix} \right\}$;

2) $M_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} \right]_s$;

3) $M_3 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \right]_s$;

4) $M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 6 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 6 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \right\}$?

3.1.33. Пусть G — некоторая группа преобразований множества Ω. Доказать, что если $u, v \in G$, то выполняются условия: 1) $u\Omega = v\Omega$; 2) если $u\alpha = u\beta$, то $v\alpha = v\beta$.

3.1.34.У. Доказать, что если преобразование u входит в некоторую группу преобразований множества Ω, то u удовлетворяет следующим двум условиям: 1) для любых $\alpha, \beta \in u\Omega$, $\alpha \neq \beta$, выполняется $u\alpha \neq u\beta$; 2) для любого $\alpha \in u\Omega$ найдется $\beta \in u\Omega$ такое, что $u\beta = \alpha$.

3.1.35.У. Доказать, что если для преобразования u множества Ω выполняются условия задачи 3.1.34, то u входит в некоторую группу преобразований множества Ω.

3.1.36. Пусть Ω — множество всех комплексных чисел, и пусть a, b, c, d — преобразования Ω, согласно которым

$$az = \bar{z},\ bz = z^2,\ cz = 1 - z,\ dz = z\bar{z}$$

($z \in \Omega$, $\bar{z}$ — сопряженное с z число).

Доказать, что всякое неприводимое порождающее множество полугруппы $[a, b, c, d]_s$ состоит из четырех элементов.

3.1.37.У. Пусть Ω — конечное множество, состоящее из n элементов. Доказать, что всякое порождающее множество

полугруппы T_Ω содержит преобразования ранга n и преобразования ранга $n-1$.

3.1.38.У. Пусть Ω — конечное множество, состоящее из n элементов. Доказать, что множество всех преобразований ранга $n-1$ является порождающим для идеала J_n (см. 3.1.30).

3.1.39.У. Пусть Ω — конечное множество, состоящее из n элементов. Всякое порождающее множество полугруппы T_Ω, содержащее две подстановки ранга $n-1$, приводимо. Доказать.

Примечание. Из задач 3.1.37, 3.1.38, 3.1.39 следует, что если множество Ω состоит из n элементов, то всякое неприводимое порождающее множество полугруппы T_Ω содержит некоторые подстановки ранга n и единственную подстановку ранга $n-1$.

3.1.40.У. Множество M, состоящее из любого преобразования ранга $n-1$ и всех преобразований ранга n, является порождающим для полугруппы T_Ω, где Ω — конечное множество, состоящее из n элементов. Доказать.

§ 2. Обратимые преобразования

Пусть u — преобразование множества Ω. Преобразование u^{-1} того же множества называют *обратным* для преобразования u, если $uu^{-1} = u^{-1}u = e$, где e — тождественное преобразование.

Если преобразование u обладает обратным преобразованием, то его называют *обратимым*.

Будет доказано (см. 3.2.7, 3.2.8), что преобразование обратимо тогда и только тогда, когда оно является взаимно однозначным отображением множества Ω на себя. Отсюда следует, что если обратимое преобразование записано в виде подстановки, то в нижней строке подстановки все элементы различны и в ней содержатся все элементы Ω.

Множество всех обратимых преобразований некоторого множества Ω есть группа относительно действия умножения преобразований, единицей которой является тождественное преобразование (см. 3.2.6).

Эту группу, а также любую ее подгруппу обычно называют группой преобразований. Мы в дальнейшем под словом «группа преобразований» также будем понимать только группу, состоящую из обратимых преобразований, рассматриваемую относительно действия умножения преобразований.

3.2.1. Какие из преобразований задач 3.1.2, 3.1.14 являются левыми или правыми делителями тождественного преобразования? Какие из этих преобразований обратимы? Для обратимых найти обратные преобразования.

3.2.2. Пусть Ω — множество всех вещественных чисел. Какие из следующих функций, заданных на Ω, являются обратимыми преобразованиями Ω:

1) $f_1(x) = x^n$ (n — натуральное);

2) $f_2(x) = 2^{2x}$;

3) $f_3(x) = ax + b$ (a, $b \in \Omega$, $a \neq 0$);

4) $f_4(x) = \sin x$?

3.2.3. Пусть ρ_u — бинарное отношение, определенное в задаче 3.1.16, где u — обратимое преобразование Ω. Найти:

1) $\mathrm{pr}_1\, \rho_u$, $\mathrm{pr}_2\, \rho_u$;

2) правый и левый срезы отношения ρ_u по каждому элементу.

3.2.4. Доказать, что обратимое преобразование обладает единственным обратным преобразованием.

3.2.5. Пусть u, v — обратимые преобразования множества Ω. Доказать, что uv — обратимое преобразование, и найти для него обратное преобразование.

3.2.6.Т.У. Доказать, что множество всех обратимых преобразований произвольного множества Ω есть группа преобразований. Какое преобразование является единицей этой группы? Какое преобразование является обратным элементом для преобразования u этой группы?

3.2.7.Т. Пусть u — обратимое преобразование множества Ω. Доказать, что выполняются следующие два условия:

1) u взаимно однозначно, т. е. для любых двух элементов α, $\beta \in \Omega$ ($\alpha \neq \beta$) выполняется $u\alpha \neq u\beta$;

2) $u\Omega = \Omega$, т. е. для любого элемента $\beta \in \Omega$ найдется элемент α такой, что $u\alpha = \beta$.

3.2.8.Т.У. Всякое преобразование u, для которого выполняются условия предыдущей задачи, является обратимым. Доказать.

3.2.9.У. Пусть обратимое преобразование u некоторого множества Ω задано подстановкой

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \dots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \dots \end{pmatrix}.$$

Записать в виде подстановки u^{-1}.

3.2.10. Проверить выполнение двух условий задачи 3.2.7 для преобразований, данных в задачах 3.1.11, 3.1.19, 3.1.36.

3.2.11. Используя задачи 3.2.7, 3.2.8, выяснить, какие из следующих преобразований обратимы. Для обратимых из них найти обратные преобразования:

1) преобразование, данное в задаче 1.2.5;

2) преобразование, данное в задаче 1.2.6;

3) преобразование, данное в задаче 1.2.8;

4) преобразования, указанные в предыдущей задаче.

3.2.12. Пусть k, l, m, n — заданные рациональные числа, для которых выполняется условие $kn - lm \neq 0$. Пусть Ω — поле всех вещественных чисел вида $\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}$, где $f(x)$, $\varphi(x)$ — полиномы над полем рациональных чисел, а ε — произвольное, но фиксированное вещественное трансцендентное число. Доказать, что следующее преобразование u множества Ω:

$$u\left[\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\right] = \frac{f\left(\frac{k\varepsilon + l}{m\varepsilon + n}\right)}{\varphi\left(\frac{k\varepsilon + l}{m\varepsilon + n}\right)}$$

обратимо, и найти для него обратное.

3.2.13. Пусть G — множество всевозможных преобразований из задачи 3.2.12 (для всевозможных рациональных k, l, m, n, удовлетворяющих условию $kn - lm \neq 0$).

1) Доказать, что G — группа преобразований.

2) Выяснить, является ли группой множество всевозможных преобразований u, у которых $m = 0$, $n = 1$.

3) Описать все преобразования из группы G, которые являются элементами второго порядка.

3.2.14. Пусть Ω — множество всех вещественных чисел, отличных от нуля и единицы. Множество G состоит из следующих преобразований Ω:

$$u_1\alpha = \alpha, \quad u_2\alpha = \frac{1}{\alpha}, \quad u_3\alpha = 1 - \alpha,$$

$$u_4\alpha = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad u_5\alpha = \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \quad u_6\alpha = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

1) Доказать, что G — группа преобразований, и составить таблицу умножения G.

2) В группе G найти единицу и все элементы, которые являются обратными для самих себя.

3) Доказать, что группа G изоморфна группе всех обратимых преобразований трех элементов.

3.2.15. Пусть Ω — множество всех вещественных чисел, G — множество всех преобразований Ω вида $u_{a,b}(\alpha)=a\alpha+b$, где a, b — произвольные вещественные числа и $a\neq 0$. Доказать, что G — группа преобразований, не обладающая конечным порождающим множеством.

3.2.16. Пусть G — группа из предыдущей задачи. Какие из следующих подмножеств G являются подгруппами G, какие являются нормальными делителями G:

1) подмножество H преобразований $u_{1,b}$;
2) подмножество H' преобразований $u_{a,a}$;
3) подмножество H'' преобразований $u_{a,0}$?

3.2.17. Пусть G — группа всех обратимых преобразований некоторого множества Ω, и пусть $\bar{\bar{G}}$ — совокупность бинарных отношений ρ_u из задачи 3.1.16 для всевозможных $u\in G$. Доказать, что $\bar{\bar{G}}$ есть группа относительно действия умножения бинарных отношений, изоморфная G.

3.2.18. Пусть Ω — множество точек трехмерного пространства. Выяснить, какие из следующих преобразований Ω обратимы:

1) вращение пространства вокруг оси на некоторый угол;
2) проектирование пространства на данную плоскость;
3) симметрия пространства относительно данной плоскости (отражение относительно данной плоскости);
4) преобразование u, обладающее свойством $\rho(ux, uy)=2\rho(x, y)$, где $\rho(x, y)$ — расстояние между точками x, y.

3.2.19. Пусть Ω — множество точек плоскости. Выяснить, какие из следующих множеств преобразований Ω являются группами преобразований:

1) множество всех параллельных переносов плоскости;
2) множество всех вращений плоскости вокруг данной точки;
3) множество вращений плоскости на некоторый фиксированный угол φ вокруг всевозможных точек плоскости;
4) множество всех вращений плоскости вокруг всевозможных точек и всех параллельных переносов плоскости;
5) множество всех осевых симметрий плоскости.

3.2.20. Пусть

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=$$
$$=2x_1^2x_2^2+2x_1^2x_3^2+2x_1^2x_4^2+2x_2^2x_3^2+2x_2^2x_4^2+2x_3^2x_4^2+$$
$$+x_1x_2x_3x_4-5.$$

Найти число обратимых преобразований совокупности переменных $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, которые не изменяют $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

3.2.21. Пусть

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + x_1^2x_3 - x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + \\ + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3 - 5.$$

Найти обратимые преобразования совокупности переменных $\{x_1, x_2, x_3\}$, которые не изменяют $f(x_1, x_2, x_3)$. Доказать, что эти преобразования образуют группу преобразований.

3.2.22. Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольный полином. Доказать, что множество всех преобразований совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, оставляющих F без изменения, есть группа преобразований.

3.2.23. Пусть

$$v_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = (x_2 - x_1) \ldots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1}) = \\ = \prod_{j<i} (x_i - x_j).$$

Доказать, что любое обратимое преобразование совокупности переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ или оставляет v_n без изменения или изменяет только его знак.

3.2.24. Пусть $v_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — полином из предыдущей задачи. Доказать, что преобразование u совокупности его переменных, согласно которому $ux_i = x_j$, $ux_j = x_i$, $ux_k = x_k$ $(k \neq i, j)$, изменяет лишь знак v_n.

3.2.25. Доказать, что группа всех обратимых преобразований множества, состоящего из n элементов, имеет порядок $n!$

§ 3. Обратимые преобразования конечных множеств

В этом параграфе мы будем рассматривать обратимые преобразования конечных множеств. Поскольку мы занимаемся изучением суперпозиции преобразований, природа элементов преобразуемого множества нам безразлична. Поэтому из соображений удобства записи будем рассматривать в этом параграфе только преобразования множеств натуральных чисел.

Группу всех обратимых преобразований множества $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ называют *симметрической группой* n-й степени. Будем обозначать эту группу S_n. Всякое преобразование из группы S_n будем называть *подстановкой* n-й степени или преобразованием n-й степени.

Подстановку вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{k-1} & \alpha_k & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-k} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_k & \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-k} \end{pmatrix}$$

будем называть *k-членным циклом* или циклом длины k и записывать так: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Очевидно, запись цикла можно начинать с любого α_i. Запятые в записи цикла чаще всего опускаются.

Два цикла $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ будем называть *независимыми,* если множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$ не пересекаются.

Будет доказано, что каждую подстановку можно представить в виде произведения независимых циклов (см. 3.3.5). О подстановке, представленной в виде произведения независимых циклов, будем говорить, что она разложена на независимые циклы.

Двучленный цикл называют *транспозицией.*

Подстановка n-й степени называется *четной,* если ее можно представить в виде произведения четного числа транспозиций. Подстановка n-й степени называется *нечетной,* если ее можно представить в виде произведения нечетного числа транспозиций.

Будет доказано (см. 3.3.14), что каждую подстановку n-й степени можно представить в виде произведения транспозиций, причем в различных таких представлениях одной и той же подстановки количество транспозиций будет оставаться всегда четным или всегда нечетным (см. 3.3.16). Отсюда следует, что каждая подстановка n-й степени является или четной или нечетной подстановкой.

Множество всех четных подстановок n-й степени есть подгруппа группы S_n (см. 3.3.17). Эту подгруппу называют *знакопеременной группой n-й степени.*

3.3.1. Пусть $u, v, w, z, t \in S_8$,

$$u = (123)(4568), \quad v = (34)(52618), \quad w = (134)(2357)(1846),$$
$$z = (82143)(12)(15), \quad t = (874312)(56).$$

Найти u^3, v^2u, wzt, w^4z^2, tzw.

3.3.2. Найти порядки следующих элементов группы S_{12}:

$$u = (1, 3, 2, 5, 4, 6, 7, 8, 12, 10, 9, 11), \quad v = (2, 1, 5, 8, 4).$$

3.3.3. Доказать, что всякие два независимых цикла перестановочны.

3.3.4. Представить в виде произведения независимых циклов следующие подстановки:

$$u=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&1&5&6&8&7&4\end{pmatrix},$$

$$v=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\9&12&8&11&6&7&5&3&2&4&10&1\end{pmatrix},$$

$$w=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\9&6&5&1&8&7&2&3&4\end{pmatrix}.$$

3.3.5.Т. Доказать, что каждую подстановку можно представить в виде произведения независимых циклов.

3.3.6. Пусть

$$u=(\alpha_{11}\alpha_{12}\ \ldots\ \alpha_{1k_1})(\alpha_{21}\alpha_{22}\ \ldots\ \alpha_{2k_2})\ \ldots\ (\alpha_{l1}\alpha_{l2}\ \ldots\ \alpha_{lk_l}).$$

Доказать, что

$$u^{-1}=(\alpha_{lk_l}\ \ldots\ \alpha_{l2}\alpha_{l1})\ \ldots\ (\alpha_{2k_2}\ \ldots\ \alpha_{22}\alpha_{21})(\alpha_{1k_1}\ \ldots\ \alpha_{12}\alpha_{11}).$$

3.3.7. Найти все степени цикла $u=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с натуральными показателями.

3.3.8. Если разложение подстановки u на независимые циклы состоит из циклов длин $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то порядок u равен наименьшему общему кратному чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Доказать.

3.3.9. Пусть подстановка u представлена в виде произведения циклов, v — произвольная подстановка. Доказать, что если в циклах, составляющих u, произвести замену всех чисел так, как указывает подстановка v, то получится подстановка vuv^{-1}.

3.3.10. Пользуясь правилом, указанным в предыдущей задаче, вычислить uzu^{-1}, $t^{-2}wt^2$, $v^{-5}zv^5$, где u, v, w, z, t — подстановки из задачи 3.3.1.

3.3.11. Пусть

$$u=(1\ \ 2\ \ 3)(4\ \ 5\ \ 6)(7\ \ 8\ \ 9),$$

$$v=(1\ \ 4\ \ 7)(2\ \ 5\ \ 8)(3\ \ 6\ \ 9),\quad w=(4\ \ 5\ \ 6)(7\ \ 8\ \ 9).$$

Доказать, что u перестановочно и с v и с w и что u можно представить в виде произведения, сомножителями которого являются v, w.

3.3.12. Найти все элементы группы S_n, перестановочные с циклом $(\alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$.

3.3.13. Найти все элементы S_{10}, перестановочные с подстановкой $u=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)(\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_9\alpha_{10})\in S_{10}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{10}$ все различны.

3.3.14.У. Доказать, что каждую подстановку можно представить в виде произведения транспозиций.

3.3.15. Пусть

$$u=(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9),\quad v=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&5&9&4&7&6&8&5&3\end{pmatrix}.$$

Доказать, что:

1) подстановку u можно представить в виде произведения семи, девяти, одиннадцати и пятнадцати различных транспозиций и нельзя представить в виде произведения пяти транспозиций;

2) подстановку v можно представить в виде произведения четырех, шести, восьми и десяти различных транспозиций;

3) подстановку u можно представить в виде произведения любого нечетного числа транспозиций, большего пяти;

4) подстановку v можно представить в виде произведения любого четного числа транспозиций, большего двух.

3.3.16.У. Доказать, что при любом разложении данной подстановки на произведение транспозиций число транспозиций будет всегда одинаковой четности.

3.3.17.Т.У. Доказать, что множество всех четных подстановок n-й степени является подгруппой группы S_n и что порядок этой подгруппы равен $n!/2$.

3.3.18. Доказать, что подмножество

$$H=\{e,\ (12)(34),\quad (13)(24),\quad (14)(23)\}$$

группы S_4 является коммутативной подгруппой. Составить таблицу умножения группы H.

Примечание. Группу H называют *четверной группой* или *группой Клейна.*

3.3.19.У. Доказать, что следующие множества подстановок являются порождающими для симметрической группы S_n:

1) множество всех циклов;
2) множество всех транспозиций;
3) множество транспозиций $(1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1\ n)$;
4) множество транспозиций $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$;

5) множество, состоящее из двух подстановок: $(\alpha_1\alpha_2)$, $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — любая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$.

3.3.20. Доказать, что каждое из следующих множеств является порождающим множеством знакопеременной группы n-й степени:

1) множество всех тройных циклов;

2) множество циклов $(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n)$.

3.3.21.У. Доказать, что каждое из следующих множеств является неприводимым порождающим множеством группы S_6:

1) $M_1 = \{(12),\ (34),\ (56),\ (23)(45)\}$;
2) $M_2 = \{(12),\ (34),\ (123)(456)\}$;
3) $M_3 = \{(12),\ (23),\ (24)(156)\}$.

3.3.22. Доказать, что ни одно порождающее множество группы S_4, состоящее из двух элементов, не содержит элементов группы Клейна (см. 3.3.18).

3.3.23.У. Доказать, что для всякого элемента $u \in S_3$ $(u \neq e)$ найдется элемент $v \in S_3$ такой, что $S_3 = [u, v]$.

3.3.24.У. Если в разложении подстановки на независимые циклы все неединичные циклы одинаковой длины, то она называется *регулярной*. Доказать, что каждая степень n-членного цикла есть регулярная подстановка и что длина каждого цикла, входящего в ее разложение на независимые циклы, является делителем n.

3.3.25. Доказать, что всякая регулярная подстановка является степенью некоторого цикла (см. 3.3.24).

√ **3.3.26.У.** Пусть u, u' — регулярные (см. 3.3.24) перестановочные подстановки степени mn, не имеющие неподвижных точек (m, n — взаимно простые натуральные числа). Подстановка u имеет порядок m, подстановка v имеет порядок n. Доказать, что uu' — цикл длины mn.

3.3.27. Выяснить для каких m в симметрической группе S_4 найдутся элементы порядка m.

§ 4. Эндоморфизмы

Пусть в множестве Ω заданы некоторые отношения. Примерами отношений могут служить бинарные отношения, в частности упорядоченности, алгебраические действия и т. д.

Преобразование множества Ω называется *эндоморфизмом* Ω относительно заданных отношений, если всякая система элементов,

связанных одним из рассматриваемых соотношений, преобразуется в систему элементов, связанных тем же соотношением.

Например, если в множестве Ω задано алгебраическое действие, обозначаемое значком $\bigcirc$, то эндоморфизмом Ω относительно этого действия будет всякое преобразование u множества Ω, удовлетворяющее условию: если $a \bigcirc b = c (a, b, c \in \Omega)$, то $ua \bigcirc ub$ определено и $ua \bigcirc ub = uc$. Если в множестве Ω задана упорядоченность, то эндоморфизмом Ω относительно этой упорядоченности будет всякое преобразование u множества Ω, удовлетворяющее условию: если $\alpha \leqslant \beta (\alpha, \beta \in \Omega)$, то $u\alpha \leqslant u\beta$. Линейные преобразования являются эндоморфизмами линейного пространства относительно действий, введенных в этом пространстве. Пусть в трехмерном пространстве задано отношение ρ, согласно которому всякие три точки M_1, M_2, M_3 находятся в отношении ρ; если они лежат на одной прямой и M_2 лежит между M_1 и M_3, то эндоморфизмами пространства относительно ρ будут всевозможные аффинные преобразования (см. 3.4.27).

Про эндоморфизм множества Ω относительно заданных в Ω отношений говорят, что он сохраняет эти отношения в Ω.

Легко доказать, что множество всех эндоморфизмов произвольного множества относительно заданных в нем отношений является полугруппой преобразований (см. 3.4.7).

Обратимое преобразование u множества Ω, являющееся эндоморфизмом относительно некоторых заданных в Ω отношений, будем называть *обратимым эндоморфизмом* Ω относительно этих отношений. Если же u^{-1} тоже является эндоморфизмом относительно заданных отношений, то u называют *автоморфизмом* Ω относительно этих отношений.

Будет доказано (см. 3.4.12), что множество всех автоморфизмов Ω относительно заданных отношений является группой преобразований.

Если ясно, относительно каких отношений рассматривается эндоморфизм, то слова «относительно заданных отношений» опускают.

Отметим, что термин «эндоморфизм» в теории групп обычно применяется только в одном частном случае, а именно к эндоморфизмам, сохраняющим действие в группе. Если некоторая подгруппа преобразуется в себя при всех эндоморфизмах группы, сохраняющих действие, то она называется *вполне характеристической подгруппой*.

3.4.1. Пусть Ω — множество всех вещественных чисел, упорядоченное по величине. Какие функции, заданные на всем множестве Ω, являются эндоморфизмами Ω?

3.4.2. Пусть ρ — следующее бинарное отношение в множестве N натуральных чисел: $(m, n) \in \rho$, если m делится на n. Какие из следующих преобразований являются эндоморфизмами N:

1) преобразования u, v задачи 3.1.14;

2) преобразование t, согласно которому $tn = n^2$ $(n \in N)$;

3) преобразование z, согласно которому

$$zn = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ p_n, & \text{если } n > 1, \end{cases}$$

где p_n — наибольшее простое число, являющееся делителем n;

4) преобразование w_p, согласно которому $w_p(n) = pn$, где p — фиксированное натуральное число, $n \in N$.

3.4.3. Пусть N — множество натуральных чисел. Какие из преобразований задачи 3.4.2 являются эндоморфизмами N, сохраняющими действие сложения, действие умножения?

3.4.4. Пусть в множестве всех целых чисел R определено действие следующим образом: $m \circ n = m + n$, если m, n — натуральные числа; для остальных пар чисел действие не определено.

1) Доказать, что преобразование u, согласно которому

$$u(l) = \begin{cases} 2l, & \text{если } l \geqslant 0; \\ -l, & \text{если } l < 0 \text{ и нечетное}; \\ \frac{l}{2}, & \text{если } l < 0 \text{ и четное}, \end{cases}$$

является обратимым эндоморфизмом R.

2) Выяснить, является ли u автоморфизмом R.

3.4.5. Пусть в множестве A определено действие, обладающее свойством неограниченной применимости. Доказать, что всякий обратимый эндоморфизм A является автоморфизмом.

Примечание. Результат сопоставить с результатом предыдущей задачи.

3.4.6. Доказать, что преобразование u из задачи 3.2.12 является автоморфизмом преобразуемого множества Ω относительно обычных действий сложения, вычитания, умножения и деления и что при этом автоморфизме каждое рациональное число остается неподвижным.

3.4.7.Т. Пусть в множестве Ω заданы некоторые отношения. Доказать, что множество всех эндоморфизмов Ω, сохраняющих заданные отношения, является полугруппой относительно действия умножения преобразований.

3.4.8. Пусть A — мультипликативное множество, $a \in A$ и пусть u_a — преобразование множества A, преобразующее каж-

дый его элемент в a. Доказать, что u_a является эндоморфизмом A тогда и только тогда, когда a — идемпотент.

3.4.9. Пусть R — аддитивная группа рациональных чисел, $r \in R$. Доказать, что преобразование x_r, согласно которому $x_r(a) = ra$ (для любого $a \in R$), является эндоморфизмом R.

3.4.10. Пусть R — аддитивная группа рациональных чисел. Доказать, что полугруппа эндоморфизмов R состоит из всевозможных эндоморфизмов x_r задачи 3.4.9 (при всех $r \in R$).

3.4.11.Т. Используя две предыдущие задачи, доказать, что всякий эндоморфизм аддитивной группы рациональных чисел, отличный от нулевого, является автоморфизмом (нулевой эндоморфизм преобразует каждое число в нуль).

3.4.12.Т. Пусть в множестве Ω заданы некоторые отношения. Доказать, что множество всех автоморфизмов Ω, сохраняющих заданные отношения, является группой преобразований.

3.4.13.У. Пусть в конечном множестве Ω заданы некоторые отношения. Доказать, что всякий обратимый эндоморфизм Ω относительно заданных отношений является автоморфизмом. Справедливо ли это утверждение для любого множества?

3.4.14. Пусть G — группа всех неособенных матриц второго порядка с рациональными элементами, d — определитель матрицы $a \in G$, записанный в виде $d = \frac{m}{n} 2^{l_a}$, где m, n — нечетные целые числа, l_a — целое число (таким способом, очевидно, можно записать всякое рациональное число d).

1) Доказать, что преобразование $u \in T_\Omega$, определенное следующим образом:

$$u(a) = \begin{pmatrix} 1 & l_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

является эндоморфизмом группы G относительно действия умножения матриц.

2) Найти образ матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

при этом эндоморфизме.

3) Доказать, что центр группы G не является ее вполне характеристической подгруппой.

3.4.15. Найти все вполне характеристические подгруппы группы кватернионов (см. 2.6.39).

3.4.16. Пусть в множестве $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ задано бинарное отношение ρ следующим образом: $(m, n) \in \rho$, если числа m, n взаимно просты. Найти количество эндоморфизмов Ω, имеющих ранги не больше двух.

3.4.17. Пусть $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, и пусть в Ω задана упорядоченность следующим образом: $\alpha < \beta < \xi$ при любом $\xi = \gamma, \delta, \varepsilon$.

1) Найти все автоморфизмы Ω.

2) Доказать, что группа автоморфизмов Ω изоморфна группе S_3 (см. § 3).

3.4.18. Пусть упорядоченность в конечном множестве Ω задается так: $\alpha \leqslant \xi$, где α — фиксированный, а ξ — произвольный элементы из Ω. Описать все эндоморфизмы Ω.

3.4.19. Пусть Ω — упорядоченное множество из задачи 3.4.18. Пусть Ω' получается из Ω присоединением элемента ν, не сравнимого ни с одним элементом из Ω ($\nu \not\leqslant \xi$, $\xi \not\leqslant \nu$, $\xi \in \Omega$). Доказать, что группы автоморфизмов Ω и Ω' изоморфны.

3.4.20. Пусть ρ — непустое бинарное отношение в множестве Ω. Пусть J — множество всех преобразований Ω, ранги которых равны 1. Доказать, что полугруппа всех эндоморфизмов Ω содержит J тогда и только тогда, когда ρ — рефлексивное отношение.

3.4.21. Пусть ρ — рефлексивное бинарное отношение в множестве Ω. Доказать, что полугруппа эндоморфизмов Ω относительно ρ совпадает с полугруппой всех преобразований Ω тогда и только тогда, когда ρ — диагональ или универсальное бинарное отношение (см. гл. I, § 3).

3.4.22. Пусть Ω — упорядоченное множество. Будем говорить, что Ω связно, если для любых α, $\beta \in \Omega$ найдется цепочка элементов $\xi_1 = \alpha$, ξ_2, ..., $\xi_n = \beta$ (ξ_1, ..., $\xi_n \in \Omega$), в которой каждые два соседних элемента сравнимы ($\xi_i \leqslant \xi_{i+1}$ или $\xi_{i+1} \leqslant \xi_i$). Доказать, что если Ω связно, то для любого эндоморфизма u множество $u\Omega$ также связно.

3.4.23.У. Доказать, что всякий обратимый эндоморфизм линейно упорядоченного множества является автоморфизмом. Справедливо ли это утверждение для любого упорядоченного множества?

3.4.24. Пусть N — множество натуральных чисел, упорядоченное по величине. Доказать, что группа автоморфизмов N единичная. Справедливо ли это утверждение для множества всех целых чисел, упорядоченного по величине?

3.4.25. Пусть ρ — отношение эквивалентности в множестве Ω и $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$. Доказать, что преобразование u, определенное следующим образом:

$$u\xi = \begin{cases} \alpha, & \text{если} \quad (\xi, \gamma) \in \rho; \\ \beta, & \text{если} \quad (\xi, \gamma) \notin \rho, \end{cases}$$

является эндоморфизмом Ω.

3.4.26. Пусть Ω — упорядоченное множество, $\alpha \leqslant \beta$, $\gamma \leqslant \delta$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$). Доказать, что существует эндоморфизм Ω, который преобразует α в γ, а β в δ.

3.4.27.У. Пусть в трехмерном пространстве задано отношение ρ, согласно которому точки M_1, M_2, M_3 находятся в отношении ρ, если они расположены на одной прямой так, что M_2 лежит между M_1 и M_3. Доказать, что всякое аффинное преобразование пространства является эндоморфизмом пространства относительно ρ (аффинное преобразование — это обратимое преобразование, переводящее всякую прямую в прямую). Выяснить, являются ли аффинные преобразования автоморфизмами пространства относительно ρ.

3.4.28. Пусть Ω — множество всевозможных чисел вида $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$, где a, b, c, d — рациональные числа, и пусть G_2 — группа всех автоморфизмов Ω относительно обычных арифметических действий, для которых каждое рациональное число является неподвижной точкой (см. 3.4.12).

1) Найти $u(\sqrt{2})$, $u(\sqrt{3})$ для любого $u \in G_2$.

2) Доказать, что группа G_2 конечна.

3.4.29. Пусть G_2 — группа из предыдущей задачи. Доказать, что подмножество H группы G_2, состоящее из всех автоморфизмов, для которых $\sqrt{2}$ является неподвижной точкой, есть нормальный делитель группы G_2.

3.4.30.У. Пусть Ω — поле из задачи 3.2.12. Доказать, что группа всех автоморфизмов Ω относительно обычных арифметических действий бесконечна.

3.4.31. Пусть P — множество эндоморфизмов упорядоченного множества Ω, определенное следующим образом:

$u \in P$, если $u\Omega$ линейно упорядочено. Доказать, что P — двусторонний идеал полугруппы всех эндоморфизмов Ω.

3.4.32.У. Пусть $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ упорядочено по величине.

1) Найти все идемпотенты полугруппы эндоморфизмов Ω ранга $n-1$.

2) Доказать, что все идемпотенты ранга $n-1$ образуют порождающее множество этой полугруппы.

3.4.33. Пусть Ω — упорядоченное множество из задачи 3.4.18. Доказать, что полугруппа эндоморфизмов Ω регулярна.

3.4.34.У. Доказать, что полугруппа эндоморфизмов упорядоченного множества Ω из задачи 3.4.17 нерегулярна.

§ 5. Группы движений

Пусть Ω — множество точек прямой. *Движением* прямой называется всякое преобразование Ω, сохраняющее расстояние между любыми ее двумя точками.

В множестве Ω для каждого вещественного неотрицательного числа c определим бинарное отношение ρ_c, согласно которому $(M_1, M_2) \in \rho_c$, если расстояние между точками M_1, M_2 равно c. Тогда движения и только они являются эндоморфизмами Ω, сохраняющими каждое из отношений ρ_c.

Наряду с движениями прямой мы будем рассматривать движения плоскости и пространства, т. е. их преобразования, сохраняющие расстояния между точками. Так же как и на прямой, движения плоскости и пространства являются эндоморфизмами относительно всех отношений ρ_c.

Всякое преобразование, которое является результатом некоторого механического перемещения, очевидно, является движением. Такие движения обычно называют *движениями первого рода*. Все движения не исчерпываются движениями первого рода. Например, симметрия плоскости относительно прямой (ее иначе называют отражением относительно прямой) является движением, но не является движением первого рода. Движения, не являющиеся движениями первого рода, называют *движениями второго рода*.

В дальнейшем мы не будем подразделять движения на движения первого и второго рода и даже не будем использовать термины: «движение первого рода», «движение второго рода».

Каждое из множеств: всех движений прямой, всех движений плоскости, всех движений пространства — является группой преобразований (см. 3.5.1). Подгруппы этих групп называют *группами движений*.

Пусть Ω — множество точек прямой, плоскости или пространства, а Φ — некоторая фигура в Ω (т. е. Φ — подмножество Ω). *Самосовмещением* фигуры Φ в Ω называется всякое движение Ω, преобразующее фигуру Φ на себя.

Для данной фигуры Ф рассмотрим в Ω бинарное отношение τ_Φ, согласно которому $(M_1, M_2) \in \tau_\Phi$, если обе точки $M_1, M_2 \in \Phi$. Будет доказано, что самосовмещения фигуры Ф являются всеми автоморфизмами Ω относительно отношения τ_Φ и всех отношений ρ_c, определенных выше (см. 3.5.11). Отсюда следует, что множество всех самосовмещений фигуры есть группа преобразований.

Можно сказать, что группа самосовмещений фигуры характеризует «степень симметричности фигуры». Иначе говоря, нахождение группы самосовмещений фигуры равносильно нахождению ее симметрии. Определение симметрии фигур часто бывает очень важным для изучения их строения. В частности, изучение групп самосовмещений фигур специального вида имеет весьма большое значение в кристаллографии.

3.5.1. Пусть Ω — множество точек прямой, плоскости или пространства. Доказать, что:

1) каждое движение Ω является обратимым преобразованием;

2) множество всех движений Ω является группой преобразований.

3.5.2. Доказать, что группа всех движений прямой имеет подгруппу, изоморфную аддитивной группе вещественных чисел.

3.5.3. В группе всех движений плоскости найти все элементы конечного порядка и все элементы второго порядка.

3.5.4. Доказать, что множество всех осевых симметрий плоскости является порождающим множеством группы всех движений плоскости.

3.5.5. Доказать, что множество параллельных переносов плоскости является нормальным делителем группы всех движений плоскости.

3.5.6. Пусть Ф — некоторая фигура в пространстве, и пусть G — совокупность всех движений пространства, для каждого из которых любая точка фигуры Ф является неподвижной точкой. Доказать, что G — группа движений.

3.5.7. Найти порядок группы G из предыдущей задачи, если:

1) Ф есть некоторая прямая;

2) Ф состоит из двух пересекающихся прямых;

3) Ф состоит из двух скрещивающихся прямых.

3.5.8. Пусть Ф — некоторая фигура в пространстве; A — совокупность всех движений пространства u, для которых $u(\Phi) \subseteq \Phi$ (в частности, может быть $u(\Phi) = \Phi$). Доказать, что A — полугруппа с единицей. Выяснить, для каких элементов $u \in A$ имеет место $u^{-1} \in A$.

3.5.9. Выяснить, для каких из следующих фигур полугруппа A из предыдущей задачи является группой:

1) шара;

2) полуплоскости;

3) правильного многогранника.

3.5.10. Пусть Φ — множество всех точек первой четверти координатной плоскости; A — полугруппа, определенная в задаче 3.5.8. Доказать, что множество, состоящее из всех элементов бесконечного порядка группы $[A]_g$ и единицы этой группы, является подгруппой группы $[A]_g$. Описать эту подгруппу.

3.5.11. Пусть Φ — фигура на прямой, плоскости или в пространстве. Доказать, что самосовмещения Φ и только они являются автоморфизмами относительно τ_Φ и всех отношений ρ_c (см. введение).

3.5.12. Найти порядок подгруппы всех самосовмещений каждой из следующих фигур в группе всех движений прямой:

1) полупрямой;

2) отрезка;

3) фигуры, составленной из бесконечного множества непересекающихся отрезков равной длины, расположенных так, что для каждого отрезка существуют отрезки, находящиеся слева и справа от него, и расстояние между концами любых двух соседних отрезков равно некоторому фиксированному числу.

3.5.13. Найти подгруппу G всех самосовмещений прямой в группе всех движений плоскости. Доказать, что G — бесконечная некоммутативная группа.

3.5.14. Найти подгруппу всех самосовмещений каждой из следующих фигур в группе всех движений плоскости:

1) ромба;

2) квадрата;

3) равнобедренного треугольника.

3.5.15. Пусть точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ являются вершинами правильного n-угольника с центром O. Точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — середины сторон данного n-угольника (B_i — середина стороны A_iA_{i+1} для $i = 1, \ldots, n-1$, а B_n — середина стороны A_nA_1). Фигура Φ образована всеми треугольниками OA_iB_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Доказать, что подгруппа самосовмещений фигуры Φ в группе всех движений плоскости циклическая. Найти порядок этой группы.

3.5.16. Найти подгруппу самосовмещений правильного n-угольника в группе всех движений плоскости.

3.5.17. Фигура Ф составлена из двух одинаковых квадратов, имеющих общую вершину и расположенных так, что диагонали квадратов, проходящие через общую вершину, лежат на одной прямой. Найти подгруппу всех самосовмещений Ф в группе всех движений плоскости.

3.5.18. Пусть Ф — многогранник, имеющий n вершин. Доказать, что группа самосовмещений Ф изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n.

3.5.19. Доказать, что группа самосовмещений правильной n-угольной пирамиды ($n \geqslant 4$) изоморфна группе самосовмещений правильного n-угольника.

3.5.20. Доказать, что группа G всех самосовмещений правильной n-угольной пирамиды ($n \geqslant 4$) обладает единственной коммутативной подгруппой порядка n. Описать эту подгруппу (см. предыдущую задачу).

3.5.21. Пусть G — группа из задачи 3.5.20. Для каких n любые две различные симметрии относительно плоскостей симметрии пирамиды образуют порождающее множество группы G?

3.5.22. *n-угольным диэдром* называется тело, состоящее из правильной n-угольной пирамиды и ее зеркального отражения в плоскости основания. Найти порядок группы самосовмещений n-угольного диэдра при $n \neq 4$.

3.5.23. Доказать, что множество

$$G = \{e,\ (12),\ (34),\ (35),\ (45),\ (345),\ (354),\ (12)(34),\ (12)(35),\ (12)(45),\ (12)(345),\ (12)(354)\}$$

является группой подстановок, изоморфной группе самосовмещений треугольного диэдра.

3.5.24. Пусть A — некоторая вершина правильного тетраэдра. Доказать, что множество всех самосовмещений тетраэдра, оставляющих неподвижной точку A, есть группа, изоморфная симметрической группе S_3.

3.5.25.У. Описать группу самосовмещений правильного тетраэдра и доказать, что эта группа изоморфна симметрической группе четвертой степени.

3.5.26 Пусть φ — произвольный изоморфизм группы самосовмещений правильного тетраэдра на группу S_4 (см. преды-

дущую задачу). Какие самосовмещения тетраэдра соответствуют при этом изоморфизме знакопеременной группе четвертой степени?

Примечание. Эти самосовмещения тетраэдра образуют так называемую группу вращений правильного тетраэдра.

3.5.27. Доказать, что множество всех самосовмещений куба, оставляющих неподвижной некоторую фиксированную вершину A, есть группа. Описать эту группу.

3.5.28.У. Найти порядок группы всех самосовмещений куба.

3.5.29.У. Доказать, что множество вращений куба вокруг всех осей симметрии есть подгруппа группы самосовмещений куба, изоморфная симметрической группе четвертой степени (эту группу называют группой вращений куба).

3.5.30. Доказать, что множество вращений куба вокруг диагоналей и прямых, соединяющих середины противоположных ребер, есть подгруппа группы вращений куба (см. 3.5.28). Найти подгруппу S_4, изоморфную ей.

3.5.31. Икосаэдром называется правильный многогранник, ограниченный двадцатью треугольниками. Описать группу всех самосовмещений икосаэдра, оставляющих неподвижной некоторую фиксированную вершину A.

3.5.32.У. Доказать, что группа самосовмещений икосаэдра имеет порядок 120.

3.5.33. Пусть фигура Ф составлена из всевозможных точек M с координатами $\left(\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}l,\ \frac{\sqrt{3}}{2}k-\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$ в некоторой прямоугольной системе координат, где k, l — произвольные целые числа.

1) Выяснить, какие самосовмещения Ф, являющиеся элементами группы движений конечного порядка, не оставляют неподвижной ни одну точку фигуры Ф.

2) Доказать, что существуют группы самосовмещений Ф порядков 2, 3, 6, 12 и не существует группы самосовмещений Ф порядка 5.

3.5.34. Пусть фигура Ф состоит из всех точек пространства, имеющих целые координаты в некоторой прямоугольной системе координат.

1) Найти группу самосовмещений Ф.

2) Описать все подгруппы четвертого порядка группы самосовмещений Ф.

Примечание. Конечные группы самосовмещений фигур такого типа, как в задачах 3.5.33, 3.5.34, называются *кристаллографическими группами* или *группами Федорова.* Они играют большую роль в кристаллографии.

§ 6. Частичные преобразования

Пусть Ω — произвольное множество; всякое отображение u некоторого подмножества M множества Ω в Ω называется *частичным преобразованием* Ω.

Множество $N = u(M)$ будем обозначать через $\mathrm{pr}_1 u$; множество M, на котором определено отображение u, обозначается через $\mathrm{pr}_2 u$. Используя эти обозначения, можем сказать, что преобразование u есть отображение множества $\mathrm{pr}_2 u$ на множество $\mathrm{pr}_1 u$.

Среди частичных преобразований рассматривается и пустое преобразование θ, для которого $\mathrm{pr}_1 \theta$ и $\mathrm{pr}_2 \theta$ — пустые множества.

Для задания частичного преобразования u достаточно задать $\mathrm{pr}_2 u$ и закон, сопоставляющий каждому $\alpha \in \mathrm{pr}_2 u$ элемент $u\alpha \in \Omega$. Множество $\mathrm{pr}_1 u$ этим вполне определяется.

Множество всех частичных преобразований множества Ω будем обозначать P_Ω.

Если $\mathrm{pr}_2 u = \Omega$, то частичное преобразование u превращается в обычное преобразование Ω (§ 1, гл. III). Следовательно, T_Ω (полугруппа всех преобразований Ω) содержится в P_Ω.

В множестве P_Ω определяется действие умножения или суперпозиции следующим образом: если u, $v \in P_\Omega$, то $w = uv$ есть преобразование, у которого $\mathrm{pr}_2 w$ состоит из всех $\alpha \in \mathrm{pr}_2 v$ таких, что $v\alpha \in \mathrm{pr}_2 u$, и для каждого $\alpha \in \mathrm{pr}_2 w$ выполняется равенство $w\alpha = u(v\alpha)$.

Если u, $v \in T_\Omega$, то определенное здесь умножение частичных преобразований, очевидно, совпадает с умножением преобразований в смысле § 1 гл. III.

Пусть $u \in P_\Omega$; определим в множестве Ω бинарное отношение ρ_u, согласно которому $(\alpha, \beta) \in \rho_u$, если $\beta \in \mathrm{pr}_2 u$ и $u\beta = \alpha$. Очевидно, $\mathrm{pr}_1 \rho_u = \mathrm{pr}_1 u$ и $\mathrm{pr}_2 \rho_u = \mathrm{pr}_2 u$. Будем говорить, что бинарное отношение ρ_u *соответствует* преобразованию u.

Будет доказано (см. 3.6.15), что различным частичным преобразованиям соответствуют различные бинарные отношения и что $\rho_u \rho_v = \rho_{uv}$ $(u, v \in P_\Omega)$. Следовательно, умножение частичных преобразований можно рассматривать как частный случай умножения бинарных отношений.

Особо важную роль играют взаимно однозначные частичные преобразования, т. е. такие, которые являются взаимно однозначными отображениями одного подмножества множества Ω на другое.

Если u — взаимно однозначное частичное преобразование Ω, то для него определяется обратное частичное преобразование u^{-1} (гл. I, § 2). Очевидно, что $\rho_{u^{-1}} = (\rho_u)^*$ (см. § 3 гл. I).

Если для некоторого преобразования u выполняется условие $\mathrm{pr}_1 u = \mathrm{pr}_2 u = M$ и u преобразует каждый элемент из M в себя, то это преобразование называют *частично тождественным*, соответствующим множеству M. Будем обозначать его e_M.

Как и обычное преобразование, частичное преобразование можно записать в виде подстановки, помещая в верхней строке элементы множества $\mathrm{pr}_2 u$ и под каждым элементом записывая его образ.

Пусть Ω — множество вещественных чисел. Каждая вещественная функция $f(x)$ определяет некоторое частичное преобразование u множества Ω такое, что $\mathrm{pr}_2 u$ есть область определения $f(x)$ и $ua = f(a)$ для каждого $a \in \mathrm{pr}_2 u$. Справедливо и обратное: каждое частичное преобразование Ω является вещественной функцией.

Следует отметить, что в теории функций обычно рассматривают суперпозицию функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ только тогда, когда множество значений $\varphi(x)$ содержится в области определения $f(x)$. Мы не будем придерживаться такого ограничения.

В этом параграфе, за исключением задач 3.6.25, 3.6.26, других действий над функциями, кроме суперпозиции, рассматривать не будем. В силу этого $f(f(x))$, например, мы можем обозначать через $f^2(x)$.

3.6.1.Т. Доказать, что умножение частичных преобразований обладает ассоциативным свойством.

П р и м е ч а н и е. Отсюда следует, что P_Ω есть полугруппа относительно действия умножения частичных преобразований.

3.6.2. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $u_1, u_2, v_1, v_2 \in P_\Omega$;

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 10 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 9 & 1 & 7 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти:

1) u_2^2, u_1u_2, u_2u_1, v_1^3;

2) типы элементов u_1, v_1, v_2 в полугруппе P_Ω.

3.6.3. Пусть Ω — произвольное множество. Найти типы следующих элементов в полугруппе P_Ω:

1) $u_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta \in \Omega)$;

2) $u_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta \in \Omega)$;

3) $u_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Omega, \ \alpha_n \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\})$$

3.6.4. Пусть

$$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\},\ u\in P_\Omega;$$

$$u=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 8 & 4 & 7 & 2 & 5 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти u^{-1}, uu^{-1}, $u^{-1}u$.

3.6.5. Пусть u — взаимно однозначное частичное преобразование множества Ω. Найти uu^{-1}, $u^{-1}u$. При каком условии $uu^{-1}=u^{-1}u$?

3.6.6. Пусть даны вещественные функции:

$$f_1(x)=\ln\frac{x}{1-x},\qquad f_2(x)=+\sqrt{x^2-1},\qquad f_3(x)=\sin x,$$

$f_4(x)=\arcsin x$, $f_5(x)=+\sqrt{x^2-\frac{\pi^2}{4}}$, область определения каждой из которых состоит из тех вещественных чисел, для которых соответствующая формула имеет смысл.

Найти:

1) $\mathrm{pr}_1[f_1(x)]$, $\mathrm{pr}_2[f_2f_3(x)]$, $\mathrm{pr}_1[f_2f_3(x)]$;

2) $f_1^2(x)$, $f_5f_4(x)$, $f_5^2f_4(x)$;

3) все степени $f_2(x)$.

3.6.7. Какие из следующих вещественных функций $f_i(x)$ являются взаимно однозначными частичными преобразованиями? Для каждой взаимно однозначной функции $f_i(x)$ найти обратное частичное преобразование и произведения $f_if_i^{-1}(x)$, $f_i^{-1}f_i(x)$:

1) функции, заданные в предыдущей задаче;

2) функция

$$f_6(x)=\frac{ax+b}{cx+d},$$

где a, b, c, d — фиксированные вещественные числа такие, что $ad-bc\neq 0$, а за $\mathrm{pr}_2[f_6(x)]$ принимается множество всех вещественных чисел, при которых знаменатель не обращается в нуль.

3.6.8.У. Пусть $f(x)$ — произвольный комплексный полином ненулевой степени, $\mathrm{pr}_2[f(x)]$ — множество всех комплексных чисел. Доказать, что $\mathrm{pr}_1[f(x)]$ есть множество всех комплексных чисел.

3.6.9. Пусть Ω — произвольное множество, $u\in P_\Omega$. Выяснить, когда $u^2=\theta$, $u^3=\theta$.

3.6.10. Пусть Ω — произвольное множество. Выяснить, когда $\mathrm{pr}_2(u_1u_2)=\mathrm{pr}_2(u_2)$, где u_1, $u_2\in P_\Omega$.

3.6.11. Доказать, что для любых u_1, $u_2 \in P_\Omega$ равенство $\mathrm{pr}_1(u_1u_2) = \mathrm{pr}_1 u_1$ выполняется тогда и только тогда, когда для каждого $\alpha \in \mathrm{pr}_1 u_1$ существует $\xi \in \mathrm{pr}_1 u_2$ такое, что $u_1\xi = \alpha$.

3.6.12. Пусть Ω — произвольное множество. Выяснить, когда:

1) частичное преобразование является идемпотентом;

2) взаимно однозначное частичное преобразование является идемпотентом.

3.6.13. Пусть Ω — произвольное множество. Выяснить, когда для преобразования $u \in P_\Omega$ найдется $v \in P_\Omega$ такое, что:

1) $uv = e_\Omega$;

2) $vu = e_\Omega$.

3.6.14. Пусть Ω — произвольное множество, $u \in P_\Omega$, $u \neq \theta$. Выяснить, когда найдется $v \in P_\Omega$, $v \neq \theta$, такое, что:

1) $uv = \theta$;

2) $vu = \theta$.

3.6.15. Пусть u, $v \in P_\Omega$, и пусть ρ_u, ρ_v — бинарные отношения, соответствующие преобразованиям u, v. Доказать, что если $u \neq v$, то $\rho_u \neq \rho_v$, и что $\rho_{uv} = \rho_u\rho_v$.

3.6.16. Пусть выполняются обозначения предыдущей задачи. Доказать, что множество всевозможных бинарных отношений ρ_u при всех u из полугруппы P_Ω есть полугруппа относительно действия умножения бинарных отношений, изоморфная P_Ω.

3.6.17. Выяснить, когда для бинарного отношения ρ в множестве Ω существует частичное преобразование $u \in P_\Omega$ такое, что $\rho = \rho_u$.

3.6.18. Пусть ρ_u — бинарное отношение в множестве Ω, соответствующее некоторому $u \in P_\Omega$. Выяснить, для каких преобразований u отношение ρ_u обладает свойством:

1) рефлексивности;

2) симметричности;

3) транзитивности.

3.6.19. Пусть $M \subset \Omega$. Доказать, что:

1) множество R всех преобразований $u \in P_\Omega$, у которых $\mathrm{pr}_1 u \subset M$, есть правый идеал P_Ω;

2) множество L всех преобразований $v \in P_\Omega$, у которых $\mathrm{pr}_2 v \subset M$, есть левый идеал P_Ω.

3.6.20. Доказать, что множество $L \subset P_\Omega$, состоящее из всех элементов u, для которых $\mathrm{pr}_2 u \neq \Omega$, является левым и не является правым идеалом P_Ω.

3.6.21.Т. Пусть Ω — произвольное множество. Доказать, что множество всех взаимно однозначных частичных преобразований Ω является полугруппой относительно действия умножения.

3.6.22.У. Пусть $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $u = (12)$, $v = (1, 2, \ldots, n)$, $w = e_{\{2, \ldots, n\}}$. Доказать, что полугруппа всех взаимно однозначных частичных преобразований Ω порождается подстановками u, v, w.

3.6.23. Пусть

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

— вещественная функция, область определения которой состоит из всех вещественных чисел, за исключением -1. Найти $f^2(x)$, $f^3(x)$.

3.6.24.У. Пусть R — совокупность всевозможных функций вида

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

определенных в задаче 3.6.7. Выяснить, является ли R группой относительно действия умножения частичных преобразований.

3.6.25. Пусть $\overline{G}$ — множество дробно-линейных функций, т. е. функций вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где $ad - bc \neq 0$. В $\overline{G}$ введена алгебраическая операция следующим образом: если $g(x) = \frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$, то

$$f(x) \circ g(x) = \frac{(aa_1+bc_1)\,x + (ab_1+bd_1)}{(ca_1+c_1d)\,x+(cb_1+dd_1)}.$$

Доказать, что $\overline{G}$ — группа.

Примечание. Результат сопоставить с предыдущей задачей.

3.6.26. Пусть $\overline{G}$ — группа из предыдущей задачи. Доказать, что $\overline{G}$ изоморфна группе G из задачи 3.2.13.

3.6.27. Пусть C_α — подмножество полугруппы P_Ω, состоящее из пустого преобразования и всех элементов u, у которых $\mathrm{pr}_1 u = \alpha$, где α — фиксированный элемент Ω. Доказать, что множества C_α $(\alpha \in \Omega)$ и только они являются минимальными правыми ненулевыми идеалами P_Ω (т. е. такими идеалами,

которые не содержат ненулевых правых идеалов, отличных от них самих).

3.6.28.Т.У. Пусть A — полугруппа взаимно однозначных частичных преобразований, в которой выполняются условия:

1) вместе с каждым преобразованием в A содержится и ему обратное;

2) существует множество M такое, что для каждого элемента $u \in A$ выполняется $\mathrm{pr}_1 u = \mathrm{pr}_2 u = M$.

Доказать, что A — группа.

3.6.29.Т.У. Доказать, что для всякой группы взаимно однозначных частичных преобразований выполняются условия 1), 2) предыдущей задачи.

3.6.30. Пусть B — полугруппа некоторых взаимно однозначных преобразований множества Ω, обладающая тем свойством, что вместе с каждым преобразованием u полугруппа B содержит и обратное преобразование. Доказать, что B — регулярная полугруппа, в которой каждый элемент обладает единственным регулярно сопряженным элементом (см. 2.5.16).

Примечание. Справедливо и обратное утверждение: если в полугруппе каждый элемент обладает единственным регулярно сопряженным элементом, то она изоморфна некоторой полугруппе взаимно однозначных частичных преобразований, в которой вместе с каждым преобразованием содержится и обратное преобразование.

ГЛАВА IV

ГРУППЫ И ИХ ПОДГРУППЫ

§ 1. Разложение группы по подгруппе

Пусть H — некоторая подгруппа группы G и x — некоторый элемент G. Множество xH называется *правым смежным классом* группы G по H, а Hx — *левым смежным классом* G по H. Если G представлена в виде попарно непересекающегося объединения своих правых смежных классов по H:

$$G = x_\alpha H \cup x_\beta H \cup \ldots \cup x_\xi H \cup \ldots,$$

то такое разбиение называется *правым разложением* группы G по подгруппе H. Множество элементов $\{x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ называется *множеством представителей* этого правого разложения G по H.

Аналогично определяются левое разложение и множество его представителей в левом разложении. Следует иметь в виду, что иногда то, что у нас названо правым разложением, называют левым разложением, и наоборот.

Как будет показано дальше (см. 4.1.16), множества классов в правом разложении и левом разложении равномощны. Если число их конечно, то оно называется *индексом* подгруппы H в группе G. При бесконечном количестве смежных классов в разложении мы будем говорить о бесконечном индексе.

В литературе индекс часто обозначают через $(G:H)$. В случае бесконечного множества смежных классов индексом иногда называют мощность этого множества.

Пусть F и H — две подгруппы G (в частности, F и H могут и совпадать) и x — некоторый элемент G. Множество FxH называется *двойным смежным классом* группы G по паре подгрупп (F, H) (или, как иногда говорят, по двойному модулю (F, H)).

Если G представлена в виде попарно непересекающегося объединения некоторых двойных смежных классов по паре (F, H):

$$G = Fx_\alpha H \cup Fx_\beta H \cup \ldots \cup Fx_\xi H \cup \ldots,$$

то такое разбиение называют *разложением G по паре подгрупп* (F, H) (или разложением по двойному модулю (F, H)). Множество

$\{x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ называется в этом случае *множеством представителей* этого разложения G по паре (F, H).

В коммутативной группе правое и левое разложения, очевидно, совпадают; разложение по паре (F, H) совпадает с разложением по подгруппе FH (см. 2.6.36).

4.1.1. Если элемент t содержится в некотором правом смежном классе xH группы G по подгруппе H, то $tH = xH$. Аналогично для левых классов. Доказать.

4.1.2.У. Пусть H — подгруппа группы G и $x, y \in G$. Доказать, что правые смежные классы xH и yH или совпадают или не имеют ни одного общего элемента. То же для левых классов.

4.1.3. Если x — некоторый элемент и H — некоторая подгруппа группы G, то x содержится в правом смежном классе xH и в левом смежном классе Hx. Доказать.

4.1.4.Т.У. Доказать, что для любой подгруппы H группы G всегда существует правое и левое разложение G по H.

4.1.5. Пусть даны два правых разложения группы G по подгруппе H. Доказать, что они представляют собою одно и то же разбиение множества всех элементов группы G. То же для левых разложений.

4.1.6. Найти правое разложение симметрической группы S_3 по подгруппе, состоящей из двух элементов e и $(1\ 2)$.

4.1.7. Найти левое разложение знакопеременной группы A_4 по подгруппе, состоящей из трех элементов e, $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$.

4.1.8. Найти правое и левое разложения группы кватернионов K (см. 2.6.39) по подгруппе, состоящей из двух элементов: 1 и -1. Сравнить их и объяснить результат сравнения.

4.1.9.У. Найти разложения циклической группы десятого порядка по всем ее подгруппам.

4.1.10. Найти разложение бесконечной циклической группы, порожденной элементом x, по подгруппе, порождаемой элементом x^3.

4.1.11. Что представляют собою разложения произвольной группы G по единичной подгруппе и по самой G?

4.1.12. Пусть S — некоторое множество представителей в правом разложении группы G по подгруппе H. Определим отображение f группы G в себя, полагая для каждого $z \in G$, что $f(z) = x \in S$, где $zH = xH$. Доказать, что этот закон действительно вполне однозначно определяет отображение f.

Доказать, что f является отображением G на S, обладающим нижеследующими свойствами: для всяких $z \in G$ и $h \in H$ имеют место:

1) $f(f(z)) = f(z)$;
2) $z^{-1} f(z) \in H$;
3) $f(zh) = f(z)$.

4.1.13. Пусть H — подгруппа группы G и f — отображение G в себя, обладающее нижеследующими тремя свойствами: для всяких $z \in G$ и $h \in H$ имеют место:

1) $f(f(z)) = f(z)$;
2) $z^{-1} f(z) \in H$;
3) $f(zh) = f(z)$.

Доказать, что $f(G)$ является множеством представителей в правом разложении G по H.

Примечание. Результат сопоставить с результатом 4.1.12.

4.1.14. Для левого разложения группы G по подгруппе H сформулировать условия для отображения G на множество представителей левого разложения G по H, аналогичные 4.1.12, и получить результаты, аналогичные 4.1.12 и 4.1.13.

4.1.15. Пусть $\{x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ — некоторое множество представителей в правом разложении группы G по подгруппе H и $\{h_\alpha, h_\beta, \ldots, h_\xi, \ldots\}$ — множество элементов, принадлежащих H и сопоставленных каждому элементу из множества наших представителей. Доказать, что множество $\{x_\alpha h_\alpha, x_\beta h_\beta, \ldots, x_\xi h_\xi, \ldots\}$ также будет множеством представителей правого разложения G по H и что всякое множество представителей правого разложения G по H может быть получено из исходного множества представителей $\{x_\alpha, x_\beta, \ldots \ldots, x_\xi, \ldots\}$ таким способом.

Сформулировать и доказать аналогичное свойство для левого разложения.

4.1.16.У. Пусть $\{x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ — некоторое множество представителей в правом разложении группы G по подгруппе H. Доказать, что $\{x_\alpha^{-1}, x_\beta^{-1}, \ldots, x_\xi^{-1}, \ldots\}$ будет множеством представителей в левом разложении G по H.

Примечание. Отсюда вытекает равномощность множества правых смежных классов в правом разложении G по H и множества левых смежных классов в левом разложении G по H. Это является основанием для введения понятия индекса подгруппы в группе.

4.1.17. Пусть H и H' — подгруппы группы G, причем $G \supset H \supset H'$. Даны множество S представителей правого разложения G по H и множество S' представителей правого разложения H по H'. Доказать, что SS' является множеством представителей правого разложения G по H'.

4.1.18. Сколько существует различных множеств представителей правого разложения группы порядка 12 по ее подгруппе порядка 3?

4.1.19. Пусть K — непустое подмножество группы G и $x \in G$. Доказать, что все три множества K, xK, Kx равномощны.

Примечание. В частности, всякий правый смежный класс и всякий левый смежный класс по подгруппе равномощны с этой подгруппой (если подгруппа конечна, то имеют равное с ней количество элементов).

4.1.20.Т.У. Пусть G — конечная группа порядка n, H — ее подгруппа порядка h и k — индекс H в G. Доказать, что $n = hk$.

Примечание. Отсюда следует важный вывод: в конечной группе порядок всякой ее подгруппы, так же как и индекс, является делителем порядка группы.

4.1.21.Т.У. Доказать, что в конечной группе порядок всякого ее элемента является делителем порядка группы.

Примечание. Сопоставить с результатом задачи 3.3.27.

4.1.22. Если подмножество K группы G является правым или левым смежным классом по какой-либо подгруппе, то для всяких x, y, $z \in K$ имеет место

$$xy^{-1}z \in K.$$

Доказать.

4.1.23.У. Пусть K — такое непустое подмножество группы G, что для всяких его элементов x, y, $z \in K$ имеет место

$$xy^{-1}z \in K.$$

Доказать, что тогда существует, и притом единственная, подгруппа H группы G такая, что K является правым смежным классом по H, и такая, и притом единственная, подгруппа H', что K является левым смежным классом по H'.

Примечание. Результат сопоставить с результатом предыдущей задачи.

4.1.24. В симметрической группе S_5 выяснить, какие из нижеследующих множеств будут смежными классами по какимлибо подгруппам:

1) $K_1 = \{(2\ 3\ 4), (1\ 2\ 3\ 4)\}$;
2) $K_2 = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3\ 4)\}$;
3) $K_3 = \{e, (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\}$;
4) $K_4 = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (1\ 5)\}$;
5) $K_5 = \{(1\ 2), (1\ 5\ 2)(3\ 4)\}$.

4.1.25. В группе всех неособенных комплексных квадратных матриц порядка n будет ли смежным классом и по какой подгруппе множество всех матриц, определитель которых равен заданному числу $c \neq 0$?

4.1.26.Т.У. Пусть F, H являются подгруппами группы G. Доказать, что всегда существует разложение G по паре подгрупп (F, H).

4.1.27. Найти разложение симметрической группы S_4 по паре подгрупп:

$$F = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}, \quad H = \{e, (1\ 2)(3\ 4)\}.$$

4.1.28. Найти разложение симметрической группы S_3 по паре подгрупп (F, H), где $F = H = \{e, (1\ 2)\}$.

4.1.29. Пусть N — нормальный делитель и F — произвольная подгруппа группы G. Доказать, что разложение G по паре (N, F) совпадает с правым разложением G по FN (см. 2.6.36).

4.1.30.Т.У. Пусть H_1 и H_2 — две подгруппы конечной группы G, имеющие порядки соответственно m_1 и m_2. Доказать, что множество H_1H_2 состоит из $\frac{m_1m_2}{d}$ элементов, где d есть порядок пересечения подгрупп H_1 и H_2.

4.1.31. Показать, что знакопеременная группа четвертой степени A_4 не имеет подгрупп шестого порядка.

Примечание. Сопоставить с 4.1.20.

§ 2. Отношение сопряженности в группах

Если для элементов a и b группы G найдется элемент $x \in G$ такой, что $x^{-1}ax = b$, то говорят, что элемент b *сопряжен* с a (очевидно, в этом случае и a в свою очередь сопряжен с b, ибо $a = (x^{-1})^{-1}\, b\, (x^{-1})$). Множество K элементов из G такое, что каждые два элемента из K сопряжены между собою и никакой элемент из K не сопряжен ни с каким из элементов, лежащих вне K, назы-

вается *классом сопряженных элементов* группы G. Два подмножества M_1, $M_2 \subseteq G$ называются *сопряженными*, если найдется такой $x \in G$, что $x^{-1}M_1x = M_2$ (а потому и $(x^{-1})^{-1} M_2 (x^{-1}) = M_1$).

Для подмножества M группы G совокупность всех элементов $x \in G$, перестановочных с M,

$$xM = Mx$$

называется *нормализатором* M. В случае, когда M состоит из одного элемента a, нормализатор M называется нормализатором элемента a.

Так как отношение сопряженности элементов в группе является отношением эквивалентности (см. 4.2.1), то совокупность всех элементов, сопряженных с данным, оказывается классом сопряженных элементов. Поэтому множество всех элементов группы распадается на непересекающиеся классы сопряженных элементов.

Пусть в конечной группе порядка n имеется m классов сопряженных элементов, и пусть число элементов в каждом из этих классов равно соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Тогда в силу сказанного имеет место равенство

$$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m.$$

В этом равенстве часто бывает целесообразно особо выделить слагаемые k_i, равные единице. Как будет выяснено в дальнейшем (см. 4.2.18), элементы, принадлежащие центру, и только они, обладают тем свойством, что класс элементов, сопряженных с данным элементом, состоит только из самого этого элемента. Поэтому последнему равенству можно придать вид

$$n = c + k_1 + k_2 + \ldots + k_s;$$

здесь c — порядок центра, а все k_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ больше единицы. При применении этого равенства полезно будет учитывать 4.2.10.

4.2.1.Т. Доказать, что отношение сопряженности элементов в группе является отношением эквивалентности.

4.2.2. Если элементы группы x и y сопряжены, то их порядки равны. Доказать.

4.2.3. Если два подмножества M_1 и M_2 конечной группы сопряжены, то число элементов M_1 равно числу элементов M_2. Доказать.

4.2.4. Элементы симметрической группы третьей степени S_3 распределить по классам сопряженных элементов.

4.2.5. Элементы группы кватернионов (см. 2.6.39) распределить по классам сопряженных элементов.

4.2.6. Показать, что подстановки

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

сопряжены между собою в симметрической группе S_6, и найти число таких $z \in S_6$, что

$$z^{-1}xz = y.$$

4.2.7.Т. Пусть N — нормализатор множества M в группе G. Доказать, что N является подгруппой G.

4.2.8. В группе всех вещественных неособенных матриц второго порядка найти нормализаторы следующих элементов:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad y \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.9.Т. Пусть N — нормализатор множества M в группе G. Дано левое разложение G по N:

$$G = Nx_\alpha \cup Nx_\beta \cup \ldots \cup Nx_\xi \cup \ldots$$

Доказать, что все множества

$$x_\alpha^{-1}Mx_\alpha, \; x_\beta^{-1}Mx_\beta, \; \ldots, \; x_\xi^{-1}Mx_\xi, \; \ldots$$

различны и что всякое множество, сопряженное с M, совпадает с одним из $x_\xi^{-1}Mx_\xi$ $(\xi = \alpha, \beta, \ldots)$.

4.2.10.Т.У. В конечной группе порядка n число ее подмножеств, сопряженных с данным подмножеством M, равно $\frac{n}{m}$, где m — порядок нормализатора множества M. Доказать.

Примечание. Из 4.2.10 непосредственно вытекает важное следствие: в конечной группе число элементов во всяком классе сопряженных элементов является делителем порядка группы.

4.2.11. Порядок конечной группы G равен n, порядок элемента $x \in G$ равен m, число элементов, сопряженных с x, равно k. Доказать, что k является делителем целого числа $\frac{n}{m}$.

4.2.12. Пусть k — число элементов в некотором классе сопряженных элементов конечной группы G; порядок G равен n и порядок ее центра равен c. Доказать, что k является делителем целого числа $\frac{n}{c}$.

4.2.13. Найти все конечные группы, которые обладают только двумя классами сопряженных элементов.

4.2.14. В множестве пар целых чисел (n, m) действие умножения определено по правилу:

$$(n_1, m_1)(n_2, m_2) = (n_1 + n_2, (-1)^{n_2} m_1 + m_2).$$

Доказать, что относительно приведенного действия это множество образует группу. Для каждого элемента x найти его нормализатор и определить число элементов, сопряженных с x.

4.2.15. Пусть в группе G подгруппа N является нормализатором элемента a. Показать, что для любого $x \in G$ нормализатором элемента $x^{-1}ax$ будет $x^{-1}Nx$.

4.2.16. Пусть x — элемент конечной группы G и k — число элементов, сопряженных с x в G; пусть k' — число элементов, сопряженных с x^n в G. Доказать, что k' является делителем числа k.

4.2.17.Т. Доказать, что подгруппа A группы G тогда и только тогда не имеет в G других сопряженных с ней подмножеств, кроме самой себя, когда A является нормальным делителем в G.

4.2.18.Т. Доказать, что элемент z группы G тогда и только тогда не имеет других сопряженных с ним элементов, кроме самого z, когда z принадлежит центру.

4.2.19. В симметрической группе степени n подстановки x и y разложены на независимые циклы:

$$x = (\alpha_{11} \ldots \alpha_{1k_1})(\alpha_{21} \ldots \alpha_{2k_2}) \ldots (\alpha_{p1} \ldots \alpha_{pk_p}) \quad (k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_p);$$
$$y = (\beta_{11} \ldots \beta_{1l_1})(\beta_{21} \ldots \beta_{2l_2}) \ldots (\beta_{q1} \ldots \beta_{ql_q}) \quad (l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_q).$$

Доказать, что x и y будут сопряжены в S_n тогда и только тогда, когда типы их разложений одинаковы, т. е. $p = q$ и $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \ldots, k_p = l_p$.

4.2.20. Элементы симметрической группы S_4 распределить по классам сопряженных элементов.

4.2.21. Элементы знакопеременной группы A_4 распределить по классам сопряженных элементов в A_4.

Примечание. Результат сопоставить с 4.2.20.

4.2.22. Выяснить, какие из следующих матриц сопряжены между собой в группе всех вещественных неособенных квадратных матриц второго порядка:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2.23. Пусть K_1, K_2, K_3 — три класса сопряженных элементов некоторой группы. Доказать, что при $K_1 \cap K_2K_3 \neq \varnothing$ всегда имеет место $K_1 \subset K_2K_3$.

4.2.24.У. Пусть K_1, K_2, K_3 — три класса сопряженных элементов некоторой конечной группы, причем $K_1 = K_2K_3$. Число элементов в каждом из этих классов соответственно равно k_1, k_2, k_3. Доказать, что k_1 является делителем произведения k_2k_3.

4.2.25.Т. Пусть H — подгруппа группы G и $x \in G$. Доказать, что $x^{-1}Hx$ также является подгруппой группы G.

4.2.26.У. Пусть H_1 и H_2 — две подгруппы конечной группы G, имеющие порядки соответственно m_1 и m_2. Доказать, что множество H_1xH_2 состоит из $\frac{m_1m_2}{d}$ элементов, где d — порядок пересечения подгрупп $x^{-1}H_1x$ (см. 4.2.25) и H_2 группы G.

4.2.27.Т.У. Пусть для конечной группы G дано ее разложение по паре подгрупп (F, H) (см. § 1):

$$G = Fx_1H \cup Fx_2H \cup \ldots \cup Fx_mH.$$

Порядок G равен n, порядок F равен a, порядок H равен b, порядок пересечения подгрупп $x_i^{-1}Fx_i$ (см. 4.2.25) и H равен d_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Доказать, что

$$n = \frac{ab}{d_1} + \frac{ab}{d_2} + \ldots + \frac{ab}{d_m}.$$

§ 3. Нормальные делители и фактор-группы

Согласно определению, данному в § 6 гл. II, подгруппа H группы G называется ее *нормальным делителем*, если для каждых $x \in H$ и $a \in G$ произведение $a^{-1}xa \in H$.

Было доказано (см. 2.6.35), что подгруппа H группы G является ее нормальным делителем тогда и только тогда, когда для каждого $x \in G$ выполняется равенство $xH = Hx$.

Пусть M — подмножество группы G. Пересечение всех нормальных делителей G, каждый из которых содержит множество M, является нормальным делителем G (см. 2.6.37). Этот нормальный делитель H_M содержит множество M, и сам содержится в любом нормальном делителе G, содержащем M. Поэтому H_M называют *минимальным нормальным делителем*, содержащим множество M, или еще говорят, что H_M есть нормальный делитель, порожденный множеством M.

Следует иметь в виду, что нормальный делитель, порожденный множеством M, содержит подгруппу $[M]$, но в общем случае отличен от нее.

Пусть H — нормальный делитель группы G; тогда множество правых смежных классов группы G по подгруппе H является группой относительно действия умножения классов (см. 4.3.12). Эту группу называют *фактор-группой* группы G по нормальному делителю H и обозначают через G/H.

Рассматривая множество левых смежных классов по H, получим ту же самую группу (см. 4.3.13).

Фактор-группы играют в теории групп исключительно важную роль вследствие их связи с гомоморфизмами групп. Именно, фактор-группа группы G по любому нормальному делителю является гомоморфным образом G и обратно, если G' — гомоморфный образ G, то G' изоморфна некоторой фактор-группе G (см. 4.3.26, 4.3.28).

Пусть H — подгруппа группы G. Обозначим через ρ_H бинарное отношение в G, определенное следующим образом: $(x, y) \in \rho_H$, если $xH = yH$.

4.3.1. Найти все нормальные делители симметрической группы S_3.

4.3.2. Выяснить, какие нормальные делители порождаются каждым из следующих подмножеств симметрической группы S_4:

$$M_1 = [(12),\ (1324)]_g, \qquad M_2 = \{e,\ (123),\ (132)\}, \qquad M_3 = \{e\}.$$

4.3.3. Выяснить, является ли нормальным делителем группы всех самосовмещений n-угольного диэдра ($n \neq 4$) подмножество всех вращений диэдра вокруг его оси (см. 3.5.22).

4.3.4. Доказать, что группа Клейна является нормальным делителем симметрической группы S_4 (см. 3.3.18).

4.3.5.У. Доказать, что в группе G вещественных неособенных матриц n-го порядка множество N матриц с единичным определителем является нормальным делителем.

4.3.6. Доказать, что в любой группе подгруппа индекса 2 является нормальным делителем.

4.3.7. Доказать, что знакопеременная группа n-й степени является нормальным делителем симметрической группы n-й степени.

4.3.8. Пусть G — мультипликативное множество всевозможных троек целых чисел, действие в котором определено следующим образом:

$$(k_1,\ k_2,\ k_3)(l_1,\ l_2,\ l_3) = (k_1 + (-1)^{k_3} l_1,\ k_2 + l_2,\ k_3 + l_3).$$

Проверить, что G — группа, и доказать, что подгруппа $H = [(1, 0, 0)]$ является нормальным делителем G.

4.3.9. Доказать, что в коммутативной группе каждая подгруппа является нормальным делителем.

Примечание. Существуют и некоммутативные группы с таким свойством. Например, группа кватернионов (см. 2.6.39).

4.3.10.Т. Пусть H — подгруппа группы G, и пусть $H_x = xHx^{-1}$ $(x \in G)$, а N — пересечение всех таких подгрупп H_x. Доказать, что:

1) N — нормальный делитель G;

2) N — максимальный среди нормальных делителей группы G, содержащихся в H (если нормальный делитель $N_1 \subset H$, то $N_1 \subset N$).

4.3.11. Пусть N — нормальный делитель G. Доказать, что для любых элементов $x, y \in G$ выполняется равенство

$$(xN)(yN) = xyN.$$

4.3.12.Т.У. Пусть H — нормальный делитель группы G. Доказать, что множество G/H правых смежных классов группы G по подгруппе H является группой относительно действия умножения классов. Найти единицу этой группы и для каждого элемента xH указать обратный.

Примечание. Как было указано во введении, G/H называют фактор-группой группы G по нормальному делителю H.

4.3.13. Пусть H — нормальный делитель группы G. Доказать, что множество левых смежных классов группы G по подгруппе H является группой относительно действия умножения классов и что эта группа совпадает с фактор-группой G/H.

4.3.14. Пусть G — группа, E — ее единичная подгруппа. Что представляют собой фактор-группы G/G, G/E?

4.3.15. Доказать, что фактор-группа симметрической группы S_4 по группе Клейна изоморфна симметрической группе S_3 (см. 3.3.18).

4.3.16. Доказать, что если G, N — группы из задачи 4.3.5, то фактор-группа G/N изоморфна мультипликативной группе вещественных чисел, отличных от нуля.

4.3.17.У. Пусть G' — группа из задачи 3.2.19, 4). Доказать, что группа N параллельных переносов плоскости является нормальным делителем G' и что фактор-группа G'/N

изоморфна группе всех вращений плоскости вокруг некоторой фиксированной точки.

4.3.18.Т. Пусть H — нормальный делитель группы G, порядок G равен n, порядок H равен m. Доказать, что порядок G/H равен $\frac{n}{m}$.

4.3.19. Пусть H — подгруппа группы G. Доказать, что отношение ρ_H является стабильной слева эквивалентностью (см. гл. II, § 4).

4.3.20. Пусть H — подгруппа группы G. Доказать, что отношение ρ_H является двусторонне стабильной эквивалентностью тогда и только тогда, когда H — нормальный делитель G (см. предыдущую задачу).

Примечание. Используя задачу 2.4.14, отсюда получаем, что G/ρ_H является мультипликативным множеством тогда и только тогда, когда H — нормальный делитель G.

4.3.21. Пусть H — нормальный делитель G. Доказать, что фактор-множество G/ρ_H есть группа и что эта группа совпадает с фактор-группой G/H.

4.3.22. Пусть G, H — группы из задачи 4.3.8. Доказать, что фактор-группа G/H изоморфна аддитивной группе целых гауссовых чисел, т. е. чисел вида $a+bi$, где a, b — целые рациональные числа.

4.3.23. Пусть G, H — группы из задачи 3.2.16. Доказать, что фактор-группа G/H изоморфна фактор-группе, определенной в задаче 4.3.16.

4.3.24. Пусть G_2, H — группы из задачи 3.4.29. Доказать, что группы G_2/H и H изоморфны.

4.3.25.У. Доказать, что симметрическая группа S_3 является гомоморфным образом симметрической группы S_4.

4.3.26.Т.У. Пусть N — нормальный делитель группы G. Доказать, что фактор-группа G/N является гомоморфным образом G.

4.3.27.Т.У. Пусть φ — гомоморфизм группы G на группу G'. Доказать, что:

1) подмножество N группы G, состоящее из всех элементов, отображающихся на единицу G' при гомоморфизме φ, является нормальным делителем G;

2) множество всех элементов G, отображающихся при гомоморфизме φ на некоторый элемент $g' \in G'$, есть правый смежный класс группы G по подгруппе N.

Примечание. Нормальный делитель N называется *ядром гомоморфизма* φ группы G.

4.3.28.Т.У. Пусть группа G гомоморфно отображается на группу G'. Доказать, что G' изоморфна некоторой фактор-группе группы G.

Примечание. Сопоставить результаты задач 4.3.26, 4.3.28 с результатами задач 2.4.18 — 2.4.20.

4.3.29. Пусть G — некоммутативная группа, Z — ее центр. Доказать, что фактор-группа G/Z нециклическая.

4.3.30.Т. Пусть N — нормальный делитель группы G, а H — подгруппа G. Пусть $\bar{H}$ — подмножество G/N, состоящее из тех классов, в каждый из которых входит хотя бы один элемент из H. Доказать, что:

1) $\bar{H}$ — подгруппа фактор-группы G/N;

2) если $H \supset N$, то N — нормальный делитель H и $\bar{H} = H/N$.

4.3.31.Т. Пусть сохраняются условия и обозначения предыдущей задачи. Доказать, что если H — нормальный делитель группы G, то $\bar{H}$ — нормальный делитель группы G/N.

4.3.32. Пусть G, N — группы из задачи 4.3.5. Пусть H_1 — подгруппа G, состоящая из треугольных матриц, в которых ниже главной диагонали стоят нули, а H_2 — подгруппа H_1, состоящая из всех матриц с определителями ± 1. В обозначениях задачи 4.3.30 найти $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$.

4.3.33.Т. Пусть $\bar{H}$ — подгруппа фактор-группы G/N. Доказать, что:

1) подмножество H группы G, являющееся объединением всех смежных классов, входящих в $\bar{H}$, является подгруппой G, содержащей N;

2) если $\bar{H}$ — нормальный делитель G/N, то H — нормальный делитель группы G.

4.3.34. Используя 4.3.33, 4.3.15, найти все подгруппы симметрической группы S_4, содержащие группу Клейна (см. 3.3.18). Какие из этих подгрупп являются нормальными делителями S_4?

4.3.35. Пусть φ — гомоморфизм группы G_1 на группу G_2. Доказать, что:

1) если группа G_2 некоммутативна, то и группа G_1 некоммутативна;

2) если G_2 бесконечна, то и G_1 бесконечна;

3) если для некоторого $a \in G_1$ элемент $\varphi(a)$ имеет бесконечный порядок, то и элемент a имеет бесконечный порядок.

4.3.36. Пусть G — группа, A — некоторая совокупность обратимых преобразований множества элементов G, являющихся изоморфизмами G на себя; A относительно умножения преобразований является группой. Обозначим через H совокупность всевозможных пар вида (x, φ), где $\varphi \in A$, $x \in G$. В H определим действие

$$(x_1, \varphi_1)(x_2, \varphi_2) = (x_1\varphi_1(x_2), \varphi_1\varphi_2).$$

Доказать, что H есть группа, а совокупность G', состоящая из всех пар вида (x, ε) $(x \in G)$, где ε — единичное преобразование G, образует нормальный делитель группы H, изоморфный группе G, причем фактор-группа H/G' изоморфна A.

§ 4. Подгруппы конечных групп

Если все элементы группы G имеют конечные порядки, являющиеся степенями одного и того же простого числа p, то говорят, что G является p-группой.

Если порядок конечной группы G делится на p^k $(k > 0)$, где p — простое число, и не делится на p^{k+1}, то всякая подгруппа группы G, имеющая порядок p^k (о том, что такие всегда найдутся, см. 4.4.6), называется *силовской подгруппой группы G относительно простого числа p* или просто *силовской p-подгруппой* группы G.

4.4.1.Т.У. Доказать, что всякая группа, порядок которой равен p^n, где p — простое число и $n > 0$, обладает нетривиальным центром (т. е. порядок ее центра больше 1).

4.4.2.У. Доказать, что для всякого простого числа p существует единственная с точностью до изоморфизма нециклическая группа порядка p^2. При этом группа коммутативна.

4.4.3.У. Пусть порядок конечной группы делится на простое число p. Доказать, что в группе имеются элементы порядка p.

4.4.4.Т.У. Доказать, что порядок всякой конечной p-группы является некоторой степенью простого числа p.

4.4.5.У. Доказать, что всякая абелева группа порядка pq, где p и q — различные простые числа, циклическая.

4.4.6.Т.У. Пусть порядок произвольной конечной группы делится на p^k, где p — простое число. Доказать, что в группе имеются подгруппы порядка p^k.

Примечание. В частности, отсюда следует существование в конечной группе силовских p-подгрупп для любого простого p, делящего порядок группы.

4.4.7.У. Пусть P — силовская p-подгруппа конечной группы G и N — ее нормализатор. Доказать, что все элементы N, порядки которых — некоторые степени числа p, содержатся в P.

4.4.8. Найти все силовские подгруппы симметрической группы S_4.

4.4.9. Пусть $G_1 = [x]$ — циклическая группа десятого порядка и $G_2 = [y]$ — циклическая группа четвертого порядка. Через G обозначается множество, состоящее из 40 пар (g_1, g_2) $(g_1 \in G_1, g_2 \in G_2)$ с правилом умножения

$$(x^{a_1}, y^{b_1})(x^{a_2}, y^{b_2}) = (x^{a_1 + 3^{b_1} a_2}, y^{b_1 + b_2}).$$

Доказать, что G есть группа. Найти все ее силовские подгруппы.

4.4.10.Т.У. Доказать, что в конечной группе всякие две силовские подгруппы относительно одного и того же простого числа p сопряжены между собою.

4.4.11.Т.У. Пусть простое число p — делитель порядка конечной группы G и s — число различных силовских подгрупп относительно числа p.

Доказать, что s является делителем порядка группы и имеет вид $s = 1 + kp$, где k — некоторое целое неотрицательное число.

4.4.12.У. Доказать, что всякая конечная нециклическая группа шестого порядка изоморфна симметрической группе S_3.

4.4.13. Пусть порядок конечной группы равен pq, где p и q — не равные между собою простые числа. Доказать, что группа имеет нормальный делитель, порядок которого есть простое число.

4.4.14.У. Пусть порядок конечной группы равен pq, где p и q — простые числа, причем $p < q$. Если $q - 1$ не делится на p, то группа циклическая. Доказать.

4.4.15. Пусть P — силовская p-подгруппа конечной группы G; N_P — нормализатор подгруппы P и H — такая подгруппа G, что $H \supset N_P$. Доказать, что нормализатор подгруппы H совпадает с самой H.

4.4.16. Пусть N — нормальный делитель группы G конечного порядка. Простое число p является делителем порядка

G, но не является делителем индекса N в G (см. § 1 гл. IV). Доказать, что все силовские p-подгруппы группы G содержатся в N.

4.4.17. Доказать, что всякая группа порядка 50 имеет собственный нормальный делитель.

4.4.18.Т.У. Пусть H — подгруппа конечной группы G, причем порядок H равен p^k, где p — некоторое простое число. Доказать, что H содержится в некоторой силовской p-подгруппе группы G.

4.4.19.У. Пусть в конечной группе для каждого простого числа p, делящего порядок группы, существует лишь единственная силовская p-подгруппа. Доказать, что группа обладает нетривиальным центром.

4.4.20.У. Доказать, что в конечной p-группе для любого числа m, являющегося делителем порядка группы, найдется нормальный делитель, имеющий порядок m.

Примечание. Следует обратить внимание, что в произвольной конечной группе не для всякого числа m, являющегося делителем ее порядка, найдется подгруппа порядка m (см. 4.1.31).

§ 5. Коммутаторы и коммутант

Каждой паре элементов x и y группы G можно сопоставить элемент $x^{-1}y^{-1}xy$. Такой элемент называется *коммутатором* элементов x и y и обозначается через $k(x, y)$ или просто (x, y) (каковое обозначение и будет применяться в настоящем параграфе):

$$(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$$

(в математической литературе также используется обозначение $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$).

Подгруппа группы G, порожденная всеми ее коммутаторами, называется *коммутантом* группы.

4.5.1. Для произвольных элементов группы x и y проверить равенство

$$xy = yx(x, y).$$

Примечание. Это равенство объясняет роль коммутаторов. Коммутатор является как бы «поправкой» на неперестановочность элементов x и y. «С точностью до соответствующего коммутатора» x и y перестановочны. Равенство $(x, y) = e$ означает, что x и y перестановочны.

4.5.2. Каковы коммутаторы абелевой группы?

4.5.3. Пусть в группе все коммутаторы равны e. Показать, что группа абелева.

Примечание. Сопоставьте результаты задач 4.5.2 и 4.5.3.

4.5.4. Пусть элемент z группы G является некоторым ее коммутатором. Показать, что при любом $x \in G$ элемент $x^{-1}zx$ также будет коммутатором.

4.5.5. Доказать, что $(x, y)^{-1} = (y, x)$.

4.5.6. В симметрической группе S_n ($n \leqslant 4$) для элементов

$$x_1 = (1\ 2), \quad x_2 = (1\ 2\ 3), \quad x_3 = (1\ 2\ 3\ 4), \quad y = (1\ 3)(2\ 4)$$

найти коммутаторы

$$(x_1, x_2), \quad (x_1, x_3), \quad (x_1, y),$$
$$(x_2, x_1), \quad (x_3, x_1), \quad (y, x_1).$$

4.5.7. Какие элементы в группе кватернионов (см. 2.6.39) являются коммутаторами?

4.5.8. В группе целочисленных матриц второго порядка с определителем, равным ± 1, для элементов

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

найти коммутаторы (x, y), (y, z), (z, x).

4.5.9. В группе квадратных неособенных матриц третьего порядка для элементов

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

найти коммутаторы (u, v), (v, w), (w, u).

4.5.10. В симметрической группе S_n (где $n \geqslant 5$) для тройных циклов $x = (\mu, \gamma, \beta)$ и $y = (\alpha, \beta, \nu)$ (здесь $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ — любые попарно различные между собою числа) найти их коммутатор (x, y).

4.5.11.T. Доказать, что коммутант всегда является нормальным делителем группы.

4.5.12.T. Доказать, что фактор-группа группы по ее коммутанту всегда абелева.

4.5.13.T. Пусть N — некоторый нормальный делитель группы G. Доказать, что фактор-группа G/N будет абелевой тогда и только тогда, когда N содержит коммутант группы.

Примечание. Это означает, что коммутант является универсально минимальным элементом в множестве тех нормальных делителей группы, фактор-группа по которым абелева (множество рассматривается как упорядоченное по отношению к включению).

4.5.14.У. Найти коммутант симметрической группы S_n.

4.5.15. Пусть $\{x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ — некоторое порождающее множество группы G и N — такой ее нормальный делитель, который содержит все (x_ξ, x_η).

Доказать, что N содержит коммутант группы G.

4.5.16. Пусть в группе G коммутант содержится в центре группы. Доказать, что для любых $x, y, z \in G$ имеют место

$$(xy, z) = (x, z)(y, z),$$
$$(x, yz) = (x, y)(x, z),$$
$$(x^n, y) = (x, y^n) = (x, y)^n,$$
$$(xy)^n = x^n y^n (y, x)^{\frac{1}{2}n(n-1)},$$
$$(x, (y, z))(y, (z, x))(z, (x, y)) = e.$$

4.5.17.У. Доказать, что во всякой неединичной конечной p-группе коммутант отличен от самой группы.

4.5.18.У. Пусть в конечной группе порядок коммутанта равен двум. Доказать, что тогда индекс коммутанта — четное число.

4.5.19.У. Пусть дана последовательность групп, в которой каждая из групп является подгруппой следующей:

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset G_{n+1} \subset \ldots$$

Доказать, что объединение их $H = \bigcup_n G_n$ является группой и что коммутант группы H равен объединению коммутантов групп G_n.

4.5.20. Пусть N — нормальный делитель группы G. Показать, что всевозможными коммутаторами фактор-группы G/N являются смежные классы вида kN, где k — коммутатор группы G.

4.5.21. Найти коммутант группы, состоящей из всех вращений плоскости вокруг всевозможных ее точек и всех параллельных переносов плоскости (см. 3.2.19, 4)).

4.5.22.У. Найти коммутант группы всех квадратных неособенных матриц второго порядка.

§ 6. Разрешимые группы

Для всякой группы G определяется последовательность ее подгрупп, называемая рядом ее последовательных коммутантов:

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_{n-1} \supset K_n \supset \ldots,$$

где каждая K_n есть коммутант группы K_{n-1}.

Если некоторый член ряда последовательных коммутантов является единичной подгруппой $K_m = e$, то группа G называется *разрешимой*. Из $K_m = e$, очевидно, следует, что и все последующие члены состоят лишь из единицы: $e = K_m = K_{m+1} = K_{m+2} = \ldots$ В этом случае говорят, что ряд последовательных коммутантов *достигает* единичной подгруппы и *стабилизируется* на ней.

Для конечной неразрешимой группы, очевидно, на некотором шаге должно встретиться $K_n = K_{n+1} \neq e$. Тем самым и для всех последующих членов имеет место $K_n = K_{n+1} = K_{n+2} = \ldots$, т. е. ряд последовательных коммутантов стабилизируется на некоторой неединичной подгруппе.

Для бесконечной неразрешимой группы ряд последовательных коммутантов может или стабилизироваться на некоторой неединичной подгруппе или не стабилизироваться ни на какой из подгрупп.

Существует ряд эквивалентных между собою определений разрешимой группы. Некоторые из них будут получены в последующих задачах как необходимые и достаточные условия разрешимости, понимаемой в смысле приведенного выше определения.

Понятие разрешимой группы является одним из важнейших в теории групп. Это определяется как ролью в самой теории групп, так и значением в теории разрешимости в радикалах алгебраических уравнений, которая опирается на теорию конечных групп.

4.6.1. Доказать, что всякая абелева группа разрешима.

4.6.2. Доказать, что группа кватернионов (см. 2.6.39) разрешима.

4.6.3.У. Доказать, что всякая конечная группа порядка pq, где p и q — простые числа (различные или одинаковые), разрешима.

4.6.4.Т. Для того чтобы группа G была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы она обладала такой конечной последовательностью подгрупп:

$$G = H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_{m-1} \supset H_m = e,$$

в которой каждый член H_k содержит все коммутаторы предшествующей подгруппы H_{k-1}. Доказать.

Примечание. Именно этим условием удобнее всего пользоваться во многих случаях при выяснении вопроса о разрешимости группы.

4.6.5.Т.У. Доказать, что симметрические группы S_n при $n=1, 2, 3, 4$ разрешимы.

4.6.6.Т.У. Доказать, что симметрические группы S_n при $n=5, 6, 7, \ldots$ неразрешимы.

4.6.7.Т.У. Доказать, что всякая подгруппа разрешимой группы разрешима.

4.6.8.Т.У. Доказать, что фактор-группа разрешимой группы по любому ее нормальному делителю разрешима.

4.6.9.Т.У. Пусть некоторая группа G обладает таким нормальным делителем N, что группы N и G/N обе разрешимы. Доказать, что тогда и G разрешима.

4.6.10.Т. *Нормальным рядом* группы G называется такая конечная последовательность ее подгрупп

$$G=F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_{n-1} \supset F_n = e,$$

в которой каждый член является собственным нормальным делителем предыдущего.

Если группа обладает таким нормальным рядом, у которого все фактор-группы F_{k-1}/F_k абелевы, то она разрешима. Доказать.

4.6.11.Т. Доказать, что всякая разрешимая группа обладает таким нормальным рядом (см. 4.6.10), у которого все фактор-группы F_{k-1}/F_k абелевы.

П р и м е ч а н и е. Результат сопоставить с 4.6.10.

4.6.12.Т. Нормальный ряд группы G (см. 4.6.10) называется композиционным, если каждый его член есть максимальный (по включению) собственный нормальный делитель предыдущего члена.

Другими словами, это означает, что в G не существует такой группы F', которая есть нормальный делитель некоторого члена ряда F_i, и при этом

$$F_i \supset F' \supset F_{i+1}, \quad F' \neq F_i, \quad F' \neq F_{i+1}.$$

Пусть порядок n конечной группы G есть произведение m простых чисел: $n=p_1 p_2 \ldots p_m$ (p_i могут быть и одинаковыми, и различными). Если G обладает нормальным рядом, состоящим из $m+1$ членов, то этот ряд будет композиционным, а G будет разрешимой. Доказать.

Что представляют собою в рассматриваемом случае фактор-группы F_i/F_{i+1}?

4.6.13.Т.У. Доказать, что конечная разрешимая группа порядка $g=p_1p_2\ldots p_m$ (где p_i — различные или одинаковые простые числа) обладает композиционными рядами и каждый из них состоит из $m+1$ членов.

Примечание. Результат сопоставить с 4.6.12.

4.6.14.Т.У. Доказать, что всякая конечная p-группа (т. е. группа порядка p^n, где p — простое число) разрешима.

4.6.15.У. Выяснить, при каких n будет разрешима знакопеременная подгруппа A_n симметрической группы S_n.

4.6.16. В множестве $G=\{\ldots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \ldots\}$ определено действие, согласно которому

$$z_n z_m = \begin{cases} z_{n+m}, & \text{если } n \text{ четное;} \\ z_{n-m}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Доказать, что относительно этого действия G является группой. Выяснить, будет ли эта группа разрешимой.

4.6.17. В множестве бесконечных последовательностей целых чисел $(a_1, a_2, \ldots)$ определено действие, согласно которому

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots) =$$
$$=(a_1+b_1, (-1)^{b_1}a_2+b_2, (-1)^{b_1+b_2}a_3+b_3, \ldots$$
$$\ldots, (-1)^{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}a_n+b_n, \ldots).$$

Доказать, что относительно этого действия G является группой. Выяснить, будет ли эта группа разрешимой.

4.6.18.У. Доказать, что всякая конечная группа порядка 275 разрешима.

4.6.19.У. Доказать, что всякая конечная группа порядка 100 разрешима.

4.6.20.У. Доказать, что группа G из задачи 3.2.19, 4) разрешима.

§ 7. Нильпотентные группы

Наравне с рядом коммутантов, рассмотренным в предыдущем параграфе, значительную роль играют следующие две системы подгрупп группы.

Верхним центральным рядом группы G называется последовательность ее подгрупп

$$Z_0=e\subset Z_1\subset Z_2\subset\ldots\subset Z_n\subset Z_{n+1}\subset\ldots,$$

в которой Z_{n+1} $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — множество таких элементов $x \in G$, что xZ_n является центральным элементом в фактор-группе G/Z_n (Z_n при всех n являются нормальными делителями в G; см. 4.7.1). Возможен случай, когда при некотором n имеет место $Z_n = Z_{n+1}$. Тогда, конечно, выполняется $Z_n = Z_{n+1} = Z_{n+2} = \ldots$, как говорят, ряд *стабилизируется* на Z_n. Это Z_n, на котором стабилизировался верхний центральный ряд, может совпадать с самой G; тогда говорят, что верхний центральный ряд *достигает* самой группы. Возможен случай, когда этот ряд стабилизируется на некоторой подгруппе Z_n, отличной от G. Наконец, у некоторых бесконечных групп каждая Z_n может быть отлична от Z_{n+1}, т. е. ряд вовсе не стабилизируется.

Если верхний центральный ряд группы G достигает самой G, то группа G называется *нильпотентной* (в более старой литературе конечные нильпотентные группы назывались также специальными). Если при этом Z_n — первый член верхнего центрального ряда, равный G, то n называется *классом нильпотентности* для нильпотентной группы G.

Нижним центральным рядом группы G называется последовательность подгрупп

$$H_0 = G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset H_{n+1} \supset \ldots,$$

в которой H_{n+1} $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — подгруппа G, порожденная всеми коммутаторами $x^{-1}y^{-1}xy$, у которых $x \in H_n$, $y \in G$.

Значение нижнего центрального ряда, некоторые его свойства и связь между обоими центральными рядами выяснятся в последующих упражнениях.

4.7.1.Т. Доказать, что каждый член верхнего центрального ряда группы является ее нормальным делителем.

4.7.2. Доказать, что абелевы группы являются нильпотентными. Выяснить их класс нильпотентности.

4.7.3. Выяснить, какие из следующих групп являются нильпотентными. Выяснить их классы нильпотентности:

1) конечные симметрические группы S_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$;

2) группа кватернионов (см. 2.6.39);

3) группа из задачи 2.6.38;

4) группа $G = [(1\ 2\ 3\ 4); (1\ 2\ 3); (2\ 5); (5\ 6)]$;

5) группа $G = [(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8); (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 8\ 4\ 2); (9\ 10\ 11)]$.

4.7.4.У. Доказать, что класс нильпотентности конечной нильпотентной группы, порядок которой есть произведение k простых чисел (равных или различных), не превосходит $k-1$.

4.7.5.Т. Доказать, что всякая нильпотентная группа разрешима.

4.7.6. Для группы кватернионов G (см. 2.6.39) преобразование

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i & j & -j & k & -k \\ 1 & -1 & j & -j & -i & i & k & -k \end{pmatrix}$$

является изоморфизмом G на себя. Совокупность $A = \{\varepsilon, \varphi, \varphi^2, \varphi^3\}$ (где $\varepsilon = \varphi^0$ есть единичное преобразование) образует группу.

Построив для G и H методом 4.3.36 группу H, найти нижний и верхний центральные ряды H.

4.7.7. Доказать, что член Z_n верхнего центрального ряда группы G содержит все коммутаторы $x^{-1}y^{-1}xy$, у которых $x \in Z_{n+1}$, $y \in G$.

4.7.8.Т.У. Если верхний центральный ряд группы G на n-м шаге достигает самой группы $Z_n = G$, то нижний центральный ряд на n-м шаге достигает единичной подгруппы $H_n = e$. Доказать.

4.7.9.Т.У. Если нижний центральный ряд группы G на n-м шаге достигает единичной подгруппы $H_n = e$, то верхний центральный ряд на n-м шаге достигает самой группы $Z_n = G$. Доказать.

4.7.10.Т.У. Доказать, что у нильпотентной группы длины верхнего и нижнего центральных рядов одинаковы.

Примечание. Из 4.7.8, 4.7.9 и 4.7.10 вытекает, что для определения нильпотентной группы и для определения класса нильпотентности можно было бы исходить из нижнего центрального ряда.

4.7.11. Пусть коммутант некоммутативной группы G лежит в ее центре. Доказать, что G нильпотентна. Определить класс ее нильпотентности.

4.7.12.Т. Доказать, что всякая подгруппа нильпотентной группы сама нильпотентна.

4.7.13.Т. Доказать, что фактор-группа нильпотентной группы по любому ее нормальному делителю сама нильпотентна.

4.7.14.Т.У. Доказать, что всякая конечная p-группа нильпотентна.

4.7.15.У. Выяснить, какие из следующих групп являются нильпотентными. Выяснить их классы нильпотентности:

1) группа $G_1 = [(1\ 2\ 3);\ (4\ 5);\ (1\ 2)]$;

2) группа $G_2 = [(1\ \ 8\ 3\ \ 6)(2\ \ 7\ \ 4\ \ 5);\ (9\ \ 15\ \ 11\ \ 13)(10\ \ 14\ \ 12\ \ 16);\ (1\ \ 6\ 3\ 8)(2\ 8\ 4\ \ 7)(9\ \ 12\ \ 11\ \ 10)(13\ 16\ 15\ 14)]$;

3) группа $G_3 = [(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 9);\ (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 9\ 4\ 6);\ (8\ 10\ 11);\ (1\ 2\ 3\ 4);\ (1\ 3\ 2)]$;

4) группа $G_4 = [(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ 6\ 7\ \ 8)(9\ 10\ 12\ 13\ 14\ 16\ 15\ 11);\ (1\ \ 11)(2\ \ 15)(3\ \ 16)(4\ \ 14)(5\ \ 13)(6\ \ 12)(7\ \ 10)(8\ \ 9)]$.

4.7.16.У. Пусть G_i является p_i-группой ($i = 1, 2, \ldots, n$), причем все простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ различны; H — множество всевозможных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in G_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). В H определено действие

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n).$$

Доказать, что H является нильпотентной группой и что класс нильпотентности H равен наибольшему из классов нильпотентности групп G_i.

Примечание. Доказано, что всякая конечная нильпотентная группа изоморфна группе, устроенной описанным способом.

4.7.17. Пусть G_i — нильпотентная группа класса k_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$); H — множество всевозможных последовательностей $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, где $x_i \in G_i$. В H определено действие

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, \ldots).$$

Выяснить, когда H является нильпотентной группой и каков ее класс нильпотентности в этом случае.

4.7.18. Доказать, что конечная нильпотентная группа G обладает такой последовательностью своих нормальных делителей

$$G = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_{n-1} \supset N_n = e,$$

что все фактор-группы N_{k-1}/N_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) циклические.

4.7.19. Доказать, что в конечной группе совокупность ее нормальных делителей, являющихся нильпотентными группами, обладает универсально максимальным по включению элементом, т. е. нильпотентным нормальным делителем, содержащим все остальные нильпотентные нормальные делители.

4.7.20. Выяснить, когда в группе G из 4.7.17 совокупность ее нормальных делителей, являющихся нильпотентными группами, обладает универсально максимальным по включению элементом.

Примечание. Результат сопоставить с 4.7.19.

4.7.21.У. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа, и пусть группа G, имеющая порядок $p_1 p_2 p_3$, нильпотентна. Доказать, что G абелева.

§ 8. Автоморфизмы групп

Изоморфизм группы G на себя называется *автоморфизмом* группы G.

Очевидно, что такое понятие автоморфизма группы G совпадает с понятием автоморфизма множества G относительно группового действия (см. гл. III, § 4). Таким образом, автоморфизмы группы являются преобразованиями множества элементов этой группы. Как и всякие преобразования, мы иногда будем задавать автоморфизмы подстановками.

Пусть G — группа, $x \in G$. Обозначим через t_x следующее преобразование множества элементов группы G: $t_x(a) = xax^{-1}$ $(a \in G)$. Будет доказано, что для каждого $x \in G$ преобразование t_x является автоморфизмом G (см. 4.8.12), такие автоморфизмы называются *внутренними*.

Подгруппа группы G называется *характеристической*, если она отображается на себя при любом автоморфизме группы G.

4.8.1. Пусть G — аддитивная группа целых чисел. Какие из следующих преобразований u_1, u_2, u_3 являются автоморфизмами G:

1) $u_1 m = m + 1$;

2) $u_2 m = 2m$;

3) $u_3 m = -m \qquad (m \in G)$?

4.8.2. Пусть G — мультипликативная группа комплексных чисел. Какие из следующих преобразований являются автоморфизмами G:

1) $u_1 z = \bar{z}$ ($\bar{z}$ — число, сопряженное с z);

2) $u_2 [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = r^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

3) $u_3 [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] =$

$$= r\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]?$$

4.8.3.Т. Пусть φ — автоморфизм группы G. Доказать, что:

1) для любого элемента $a \in G$ элементы a и $\varphi(a)$ имеют один и тот же порядок;

2) $\varphi(e)=e$ (e — единица группы G);

3) $\varphi(a^{-1})=[\varphi(a)]^{-1}$ ($a\in G$);

4) если $M=\{x_\alpha, x_\beta, \ldots\}$ — порождающее множество группы G, то и $M'=\{\varphi(x_\alpha), \varphi(x_\beta), \ldots\}$ — порождающее множество группы G;

5) всякий класс сопряженных элементов при автоморфизме φ преобразуется в класс сопряженных элементов.

4.8.4. Пусть K — группа кватернионов (см. 2.6.39). Какие из следующих подстановок являются автоморфизмами K:

1) $u_1=(-1, i)$;

2) $u_2=(i, -i)(j, -j)(k, -k)$;

3) $u_3=(i, j, k)(-i, -j, -k)$;

4) $u_4=(i, -j, k, -i, j, -k)$;

5) $u_5=(i, -i)(j, -j)$?

4.8.5. Найти группу автоморфизмов группы [(12)(34)(56); (34)].

Примечание. Обратить внимание на то, что группа автоморфизмов коммутативной группы оказалась некоммутативной.

4.8.6. Найти группу автоморфизмов бесконечной циклической группы.

4.8.7. Пусть G — циклическая группа порядка n. Доказать, что преобразование u, определенное равенством $u(x)=x^k$ ($x\in G$), является автоморфизмом группы G в том и только в том случае, если k взаимно просто с n.

4.8.8. Доказать, что преобразованиями, описанными в предыдущей задаче, исчерпываются все автоморфизмы конечной циклической группы.

4.8.9. Пусть G — группа. Доказать, что преобразование G, переводящее каждый элемент в обратный ему элемент, является автоморфизмом группы G тогда и только тогда, когда G — коммутативная группа.

4.8.10.У. Доказать, что группа автоморфизмов конечной циклической группы, порядок которой больше 2, есть коммутативная группа четного порядка.

4.8.11.У. Описать группы автоморфизмов циклических групп порядков 12 и 14.

4.8.12.Т. Пусть G — группа и $x\in G$. Доказать, что преобразование t_x, согласно которому $t_x(a)=xax^{-1}$ ($a\in G$), является автоморфизмом G.

4.8.13.Т. Доказать, что множество внутренних автоморфизмов группы G является нормальным делителем группы всех автоморфизмов G.

4.8.14. В симметрической группе S_3 найти внутренние автоморфизмы t_{u_1}, t_{u_2}, где $u_1=(12)$, $u_2=(132)$.

4.8.15. В группе кватернионов (см. 2.6.39) найти внутренние автоморфизмы t_{-1}, t_{-i}, t_j.

4.8.16. Выяснить, какие группы имеют единичную группу внутренних автоморфизмов.

4.8.17. Найти порядок группы внутренних автоморфизмов группы $G=[(1234)(56),\ (13)]$.

4.8.18.Т. Пусть Z — центр группы G. Доказать, что группа внутренних автоморфизмов G изоморфна фактор-группе G/Z.

4.8.19. Доказать, что симметрическая группа S_n $(n \geqslant 3)$ изоморфна группе ее внутренних автоморфизмов.

4.8.20.У. Доказать, что при любом автоморфизме симметрической группы S_n $(n \geqslant 3,\ n \neq 6)$ транспозиция преобразуется в транспозицию.

4.8.21.У. Доказать, что всякий автоморфизм группы S_n $(n \geqslant 3,\ n \neq 6)$ преобразует множество различных транспозиций вида $(ij_1), (ij_2), \ldots, (ij_s)$ в множество транспозиций вида $(kl_1), (kl_2), \ldots, (kl_s)$.

4.8.22.У. Доказать, что каждый автоморфизм группы S_4 внутренний. Найти порядок группы автоморфизмов S_4.

Примечание. Утверждение задачи справедливо для любой симметрической группы S_n $(n \neq 6)$. Группа S_6 имеет внешние автоморфизмы.

4.8.23. Пусть G — аддитивная группа целых гауссовых чисел (см. 4.3.22). Описать все автоморфизмы группы G.

4.8.24. Доказать, что группа автоморфизмов группы G из предыдущей задачи изоморфна группе целочисленных квадратных матриц второго порядка с определителями ± 1.

4.8.25. Пусть G' — характеристическая подгруппа группы G, и пусть u — автоморфизм G. Обозначим через $\bar{u}$ следующее преобразование G': если $g' \in G'$, то $\bar{u}(g') = ug'$. Доказать, что $\bar{u}$ — автоморфизм G'.

Примечание. Говорят, что $\bar{u}$ *индуцирован* автоморфизмом u.

4.8.26. Доказать, что знакопеременная группа и группа Клейна (см. 3.3.18) являются характеристическими подгруппами симметрической группы S_4.

4.8.27. Найти автоморфизмы группы Клейна (см. 3.3.18), индуцированные следующими автоморфизмами S_4:

$$t_{(12)}, \quad t_{(34)}, \quad t_{(1423)}, \quad t_{(123)}.$$

Примечание. Обратить внимание на то, что разные автоморфизмы группы могут индуцировать одинаковые автоморфизмы характеристической подгруппы.

4.8.28.У. Доказать, что различные автоморфизмы группы S_4 индуцируют различные автоморфизмы ее знакопеременной подгруппы, и найти порядок группы автоморфизмов знакопеременной группы четвертой степени.

4.8.29. Доказать, что характеристическая подгруппа группы является ее нормальным делителем.

4.8.30. Пусть G — группа. Доказать, что следующие подгруппы G являются характеристическими:

1) сама группа G;
2) единичная подгруппа G;
3) центр группы G;
4) коммутант группы G.

Примечание. Результат сопоставить с результатом задачи 3.4.14.

4.8.31.У. Пусть G — некоммутативная группа. Доказать, что группа автоморфизмов G не является циклической.

§ 9. Транзитивные группы преобразований

Пусть G — группа преобразований некоторого множества Ω. Группу G называют *транзитивной*, если для любых $\alpha, \beta \in \Omega$ найдется элемент $u \in G$ такой, что $u\alpha = \beta$. Если группа G не является транзитивной, то ее называют *интранзитивной*.

В этом параграфе будем использовать следующее обозначение: если $\alpha \in \Omega$, то G_α есть подмножество всех преобразований из G, для которых α является неподвижной точкой.

Группу преобразований G множества Ω называют *импримитивной*, если: 1) она транзитивна; 2) существует собственное разбиение множества Ω на классы $M_i, M_j, \ldots$, среди которых хоть один имеет более одного элемента, такое, что для любого $u \in G$ и любого класса M_i множество $u(M_i)$ тоже является одним из этих классов.

Множества $M_i, M_j, \ldots$ называют *системами импримитивности*. Будем говорить, что эти множества образуют *ряд импримитивности*.

Если G — транзитивная группа и указанного разбиения не существует, то G называют *примитивной группой*.

Среди транзитивных групп преобразований выделяют так называемые *кратно транзитивные группы*.

Мы остановимся только на понятии дважды транзитивной группы.

Пусть G — группа преобразований множества Ω. Группу G называют *дважды транзитивной*, если для любых двух пар (α, β), (γ, δ), где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega$ и $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$, в G найдется преобразование u такое, что $u\alpha = \gamma$, $u\beta = \delta$.

Очевидно, что дважды транзитивная группа транзитивна.

4.9.1. Пусть G — группа преобразований множества Ω, и пусть существует такой $\alpha \in \Omega$, что для каждого $\beta \in \Omega$ найдется $u \in G$, преобразующее α в β. Доказать, что G — транзитивная группа преобразований.

Примечание. Обратное утверждение очевидно. Если G — транзитивная группа преобразований, то каждый элемент α обладает указанным свойством.

4.9.2. Доказать, что симметрическая и знакопеременная группы любой степени транзитивны.

4.9.3. Пусть G — интранзитивная группа преобразований множества Ω. Доказать, что существует собственное разбиение Ω на классы $M_i, M_j, \ldots$ такое, что если $\alpha \in M_i$ и $u \in G$, то $u\alpha \in M_i$; если $\alpha_1, \alpha_2 \in M_i$, то найдется такое $v \in G$, что $v\alpha_1 = \alpha_2$.

Примечание. Множества $M_i, M_j, \ldots$ называют *системами интранзитивности.*

4.9.4. Какие из следующих групп транзитивны:

$$G_1 = [(123)(456),\ (1346)],\quad G_2 = [(1234)(56),\ (123)],$$
$$G_3 = [(1234)(56),\ (123)(567)],$$

где G_1, G_2 — группы подстановок шестой степени, а G_3 — группа подстановок седьмой степени? Для интранзитивных из них найти системы интранзитивности.

Примечание. Легко видеть, что G_2 изоморфна симметрической группе S_4. Следовательно, свойство группы быть транзитивной при изоморфизме сохраняется не всегда.

4.9.5.Т. Пусть G — транзитивная группа преобразований множества Ω, и пусть $\alpha \in G$. Доказать, что:

1) G_α — подгруппа группы G;

2) если $u\alpha = \beta$ $(u \in G)$, то класс uG_α состоит из всех преобразований G, переводящих α в β.

4.9.6.У. Пусть G — транзитивная группа преобразований конечного множества Ω, состоящего из n элементов. Доказать, что индекс подгруппы G_α $(\alpha \in G)$ в группе G равен n.

Примечание. Отсюда следует, что порядок транзитивной группы преобразований конечного множества, состоящего из n элементов, делится на n.

4.9.7. Пусть G — транзитивная группа преобразований множества Ω. Доказать, что:

1) G_α, G_β (α, $\beta \in \Omega$) являются сопряженными подгруппами в группе G;

2) если G' — подгруппа G, сопряженная с некоторой подгруппой G_α, то найдется $\beta \in \Omega$ такой, что $G' = G_\beta$.

4.9.8.У. Пусть G — транзитивная группа преобразований степени n. Если $u \neq e$ принадлежит центру G, то u является регулярной подстановкой (см. 3.3.24), не имеющей неподвижных точек. Доказать.

4.9.9. Доказать, что транзитивная группа подстановок n-й степени содержит не меньше чем $n-1$ подстановку, каждая из которых не имеет неподвижных точек.

4.9.10. Пусть G — транзитивная группа подстановок степени n, порядок которой $l \neq n$, и пусть каждая неединичная подстановка из G или совсем не имеет неподвижных точек или имеет точно две неподвижных точки. Обозначим через p число подстановок из G, не имеющих неподвижных точек. Доказать, что p удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{2} l < p < \frac{3}{4} l.$$

4.9.11. Пусть G — импримитивная группа и M_i, M_j, ... — некоторый ряд импримитивности. Доказать, что множества M_i, M_j, ... равномощны.

4.9.12. Доказать, что симметрическая и знакопеременная группы любой степени примитивны.

4.9.13. Доказать, что транзитивная группа подстановок простой степени примитивна.

4.9.14. Доказать, что группа $[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\gamma)]$, где $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ — перестановка чисел 1, 2, 3, 4, импримитивна, и найти все ее системы импримитивности.

4.9.15. Найти все примитивные и импримитивные подгруппы симметрической группы S_4.

4.9.16. Доказать, что группа G_1 из задачи 4.9.4 импримитивна и что она обладает единственным рядом импримитивности.

4.9.17. Выяснить, когда группа $G = [(1\ 2\ \ldots\ n)]$ примитивна.

4.9.18. Выяснить, какие из следующих групп транзитивны, какие примитивны:

1) группа всех движений плоскости (см. гл. III, § 5);

2) группа всех параллельных переносов плоскости;

3) группа всех вращений плоскости вокруг одной точки.

4.9.19. Пусть ρ — эквивалентность в некотором множестве Ω, обладающая тем свойством, что для каждого $\alpha \in \Omega$ найдутся $\beta, \gamma \in \Omega$, $\beta \neq \alpha$, такие, что $(\alpha, \beta) \in \rho$, $(\alpha, \gamma) \notin \rho$. Пусть G — некоторая транзитивная группа преобразований множества Ω. Если каждый элемент из группы G является эндоморфизмом Ω относительно ρ, то G импримитивна. Доказать (см. гл. III, § 4).

4.9.20.Т.У. Если в транзитивной группе G некоторая подгруппа G_α не максимальна (т. е. существует подгруппа G' группы G, удовлетворяющая условию $G_\alpha \subset G' \subset G$; $G' \neq G_\alpha$; $G' \neq G$), то G импримитивна. Доказать.

4.9.21.У. Доказать, что если собственная транзитивная подгруппа G симметрической группы S_n содержит транспозицию, то она импримитивна.

4.9.22.Т.У. Доказать, что если G — транзитивная группа подстановок простой степени p, содержащая транспозицию, то G совпадает с симметрической группой S_p.

4.9.23. Пусть G — импримитивная группа, M — система импримитивности. Доказать, что множество всех преобразований $u \in G$, обладающих свойством $u(M) = M$, есть подгруппа G.

4.9.24. Пусть G — импримитивная группа, H — множество всех преобразований из G, преобразующих в себя каждую систему импримитивности некоторого ряда импримитивности. Доказать, что:

1) H — нормальный делитель;

2) H — интранзитивная группа.

4.9.25. Пусть G — импримитивная группа, обладающая конечным рядом импримитивности $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Пусть φ — отображение группы G в симметрическую группу S_n, определенное следующим образом: если $u \in G$ и $u(M_1) = M_{i_1}$, $u(M_2) = M_{i_2}$, $\ldots$, $u(M_n) = M_{i_n}$, то

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Доказать, что φ — гомоморфизм группы G в группу S_n. Найти

множество элементов G, отображающихся в единицу при этом гомоморфизме (см. предыдущую задачу).

4.9.26.У. Каждый неединичный нормальный делитель примитивной группы преобразований является транзитивной группой. Доказать.

4.9.27.У. Все интранзитивные нормальные делители импримитивной группы исчерпываются описанными в задаче 4.9.24. Доказать

4.9.28. Пусть G — интранзитивная группа преобразований множества Ω и M_i — система интранзитивности (см. 4.9.3). Для каждого $u \in G$ обозначим через u_i преобразование множества M_i, согласно которому $u_i\alpha = u\alpha$. Доказать, что множество G_i всевозможных преобразований u_i является транзитивной группой преобразований множества M_i.

4.9.29. Пусть сохраняются условия и обозначения предыдущей задачи, и пусть Γ — декартово произведение групп G_i, G_j, ..., соответствующих всем системам интранзитивности группы G (см. гл. I, § 1). Доказать, что:

1) Γ является группой относительно следующего действия:

$$(u_i, u_j, \ldots)(v_i, v_j, \ldots) = (u_iv_i, u_jv_j, \ldots);$$

2) G изоморфна некоторой подгруппе группы Γ.

Примечание. Таким образом, интранзитивная группа с точностью до изоморфизма является подгруппой декартова произведения транзитивных групп. Группу G называют *подпрямым произведением* групп G_i, G_j, ...

4.9.30. Пусть G — группа преобразований множества Ω, и пусть $\alpha, \beta \in \Omega\ (\alpha \neq \beta)$. Если для каждой пары элементов $\gamma, \delta \in \Omega\ (\gamma \neq \delta)$ найдется $u \in G$ такое, что $u\alpha = \gamma$, $u\beta = \delta$, то G — дважды транзитивная группа. Доказать.

4.9.31. Какие из следующих групп дважды транзитивны:

1) симметрическая группа степени n;

2) группа G_1 из задачи 4.9.4;

3) группа всех движений плоскости (см. 4.8.18)?

4.9.32. Выяснить, при каких n знакопеременная группа n-й степени дважды транзитивна.

4.9.33. Сколько существует дважды транзитивных групп преобразований четвертой степени.

4.9.34.У. Доказать, что порядок дважды транзитивной группы преобразований n-й степени делится на число $n(n-1)$.

ГЛАВА V

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ МНОЖЕСТВА СООТНОШЕНИЙ

§ 1. Определяющие множества соотношений в полугруппах

Пусть A — полугруппа, K — подмножество A. Будем рассматривать слова в полугруппе A над множеством K (см. гл. II, § 5).

Если $u = x_1x_2 \ldots x_n$, $v = y_1 \ldots y_m$ — слова в полугруппе A над множеством K, то через uv будем обозначать слово $x_1 \ldots \ldots x_ny_1 \ldots y_m$.

Если K — подмножество полугруппы A и $x_1x_2 \ldots x_n$ — слово над K, то элемент полугруппы A, равный произведению элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называется *значением* данного слова в A (см. гл. II, § 5).

Если $A = [K]_s$, то каждый элемент полугруппы A является значением некоторого слова над K, причем для одного элемента могут существовать несколько слов над K, значениями которых является данный элемент.

Если $x_1x_2 \ldots x_n$, $y_1y_2 \ldots y_m$ — два слова, значения которых совпадают, то в полугруппе A справедливо равенство

$$x_1x_2 \ldots x_n = y_1y_2 \ldots y_m.$$

Всякое такое равенство называют *соотношением* в полугруппе A относительно множества K. Иными словами, соотношение — это пара слов, значения которых в полугруппе A совпадают.

Будем говорить, что слова $x_1x_2 \ldots x_n$, $y_1y_2 \ldots y_m$ образуют соотношение, и записывать его в виде $x_1x_2 \ldots x_n = y_1y_2 \ldots y_m$ или $y_1y_2 \ldots y_m = x_1x_2 \ldots x_n$.

В дальнейшем слова «относительно K» будем опускать, если ясно, относительно какого множества рассматривается слово или соотношение.

Пусть $A = [K]_s$ и порождающее множество K обладает тем свойством, что каждое слово над K имеет единственное значение в полугруппе A; тогда K называют *свободным порождающим множеством* полугруппы A. Если полугруппа обладает *свободным* порождающим множеством K, то ее называют *свободной полугруппой над K* или просто *свободной полугруппой.*

Пусть $A = [K]_s$ и Φ — некоторое множество соотношений в полугруппе A относительно K. Если $w_1 = w_2$ — некоторое соотноше-

ние из Ф, а v_1, v_2 — произвольные слова над K, то в A, очевидно, выполняются соотношения:

$$v_1 w_1 = v_1 w_2, \ w_1 v_2 = w_2 v_2, \ v_1 w_1 v_2 = v_1 w_2 v_2.$$

Всякое соотношение такого вида, а также всякое соотношение вида $u = u$, где u — слово над K, будем называть *непосредственным следствием* из Ф.

Соотношение $u_1 = u_2$ называется *следствием* из множества соотношений Ф, если найдется конечная последовательность соотношений относительно K: $u_1 = v_1, \ v_1 = v_2, \ldots, v_n = u_2$, в которой каждое соотношение является непосредственным следствием из Ф.

Очевидно, что если слова u_1, u_2 образуют соотношение, являющееся следствием из некоторого множества соотношений в полугруппе A, то слова u_1, u_2 имеют равные значения в полугруппе A. Обратное утверждение, конечно, справедливо не всегда, т.е. может оказаться, что слова v_1, v_2 имеют одинаковые значения в A, но соотношение $v_1 = v_2$ не является следствием из выбранной системы соотношений.

Некоторое множество соотношений Ф в полугруппе A относительно порождающего множества K называют *определяющим множеством соотношений полугруппы* A относительно K или *определяющей совокупностью* соотношений, если каждое соотношение в A относительно K является следствием из множества соотношений Ф.

Соотношения, входящие в определяющее множество соотношений, часто называют *определяющими соотношениями.* Основной смысл понятия определяющего множества соотношений заключается в том, что задание определяющего множества соотношений определяет полугруппу с точностью до изоморфизма (см. 5.1.19).

В задачах из соображений удобства записи будут встречаться символы вида u^0. Такие символы при чтении слова следует опускать. Например, $x^0 y^5$ будем читать y^5.

5.1.1. Пусть $A = [u, v, w]_s$ — полугруппа преобразований, где

$$u = (1 \ \ 2), \qquad v = (n, \ n-1, \ \ldots, \ 1), \qquad w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 1 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Выяснить, какие пары, составленные из следующих слов над $\{u, \ v, \ w\}$, образуют соотношения в A:

$$t_1 = wu, \qquad t_2 = v^{n-2} u v^2 w v^{n-2} u v^2, \qquad t_3 = w v^{n-1} u v w,$$
$$t_4 = v u v^{n-1} w v u v^{n-1} w, \qquad t_5 = v^{n-1} u v w v^{n-1} u v w, \qquad t_6 = (vu)^{n-1}.$$

5.1.2. Пусть a, b, c — различные элементы некоторой полугруппы A и в полугруппе $[a, b, c]_s$ выполняются соотношения:

$$a^5 = a^3, \qquad a^2 b = a^2, \qquad a^7 c b^5 a^3 b^{11} = a^3 c, \qquad b c a^3 = c b a^2,$$
$$a^2 c = c a^3, \qquad a^3 c a = a^3 c, \qquad bc = cb, \qquad b a^2 = b.$$

Выяснить относительно каждого из этих соотношений, является ли оно следствием остальных семи соотношений.

5.1.3. Пусть A — полугруппа из предыдущей задачи. Доказать, что в A справедливы следующие равенства:

$$a^2c = a^{12}b^{11}ca^{10}, \qquad (ba^3)^4 = b, \qquad (abca)^3 = ac^2baca^4.$$

5.1.4. Пусть дана полугруппа $A = [K]_s$ и Φ — некоторое множество соотношений в A относительно K. Доказать, что:

1) соотношение $u = u$ является следствием из Φ;

2) если соотношение $u = v$ является следствием из Φ, то и соотношение $v = u$ — следствие из Φ;

3) если $u = v$, $v = w$ — следствия из Φ, то и соотношение $u = w$ — следствие из Φ;

4) если $u = v$ — следствие из Φ, а w_1, w_2 — произвольные слова над K в полугруппе A, то соотношения $w_1u = w_1v$, $uw_2 = vw_2$, $w_1uw_2 = w_1vw_2$ являются следствиями из Φ;

5) если $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ — следствия из Φ, то и $u_1u_2 = v_1v_2$ — следствие из Φ.

5.1.5.У. Пусть $A = [a, b, c, d]_s$ — полугруппа из задачи 3.1.36. Проверить справедливость следующих соотношений в A: $ab = ba$, $ac = ca$, $ad = da$, $bd = db$, $a^3 = a$, $ad = d$, $c^3 = c$, $a^2 = c^2$, $bd = d^2$, $b^4c^3a^5d^7b^3a^2d^8cd = b^4cd^{18}cd$, $ba^3cb^2abda^2 = ba^3cb^2ad^2a^2$, $c^8b^5a^3c^6a^2b^4 = ab^9$.

5.1.6.У. Выяснить, является ли следующее множество соотношений:

$$ab = ba,\ ad = da,\ bd = db,\ ad = d,$$

$$bd = d^2,\ ac = ca,\ a^3 = a,\ c^3 = c$$

определяющим множеством соотношений полугруппы A из предыдущей задачи.

5.1.7. Пусть $A' = [a, b, d]_s$ — подполугруппа полугруппы A из задачи 5.1.5. Доказать, что следующее множество соотношений:

$$ab = ba,\ ad = da,\ bd = db,$$

$$ad = d,\ bd = d^2,\ a^2b = b,\ a^3 = a$$

является определяющим для полугруппы A'.

5.1.8. Пусть в полугруппе $A=[x_1, x_2]_s$ справедливы следующие соотношения:

$$x_1^4=x_1^3,\ x_2^4=x_2^3,\ x_1^2x_2=x_2x_1^2=x_2,$$
$$x_2^2x_1=x_1x_2^2=x_1,\ (x_1x_2)^3x_1=x_1.$$

Доказать, что полугруппа A конечна.

5.1.9. Пусть полугруппа A обладает конечным порождающим множеством K, и пусть при некотором натуральном n для всякой последовательности $2n+1$ элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1} \in K$ выполняется соотношение

$$x_1x_2 \ldots x_n = x_{n+1}x_{n+2} \ldots x_{2n+1}.$$

Доказать, что полугруппа A конечна и обладает нулем.

5.1.10.Т. Пусть Ω — произвольное множество, C_Ω — множество всевозможных конечных последовательностей элементов из Ω. В C_Ω определено действие умножения следующим образом: если $a=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $b=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, то $ab=(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. Доказать, что:

1) C_Ω — свободная полугруппа;

2) в C_Ω имеется лишь единственное свободное порождающее множество;

3) если A — свободная полугруппа, то найдется множество Ω такое, что A будет изоморфна полугруппе C_Ω.

Примечание. Отсюда следует, что всякая свободная полугруппа обладает лишь единственным свободным порождающим множеством.

5.1.11.Т. Доказать, что каждая полугруппа является гомоморфным образом некоторой свободной полугруппы.

5.1.12. Пусть $A=[x]_s$ — конечная моногенная полугруппа. Доказать, что существует определяющее множество соотношений полугруппы A относительно порождающего множества $\{x\}$, состоящее из одного соотношения.

5.1.13. Пусть R — мультипликативная полугруппа натуральных чисел; K — ее неприводимое порождающее множество, состоящее из всех простых чисел и единицы (см. 2.5.3). Доказать, что всевозможные соотношения вида $pq=qp$, $p1=p$ $(p, q \in K)$ образуют определяющее множество соотношений полугруппы R относительно K.

5.1.14.Т. Доказать, что в каждой полугруппе существует определяющее множество соотношений относительно любого порождающего множества.

5.1.15. Пусть в полугруппе $A=[x_1, x_2, \ldots, x_{10}]_s$ множество соотношений

$$x_k^{k+1}=x_k,\ x_kx_l=x_lx_k$$

для всех $k=1, 2, \ldots, 10$, $l=1, 2, \ldots, 10$ является определяющим. Доказать, что A — конечная коммутативная полугруппа, не обладающая ни единицей, ни нулем, и найти количество ее элементов.

5.1.16. Пусть полугруппа $A=[u, v]_s$ обладает следующей определяющей совокупностью соотношений относительно $\{u, v\}$:

$$u^2=u, \quad v^2=v, \quad uvu=u, \quad vuv=v.$$

1) Построить для полугруппы A таблицу Кэли.

2) Выяснить, регулярна ли полугруппа A (см. гл. II, § 5).

5.1.17. Пусть $A=[K]_s$ и Φ — некоторое множество соотношений в полугруппе A. Пусть φ — отображение множества K в полугруппу B. В каждом соотношении в полугруппе A относительно K заменим все элементы из K их образами при отображении φ. Если в результате этой замены из всякого соотношения, входящего в Φ, получится соотношение в B, то и из всякого следствия из Φ получится соотношение в B. Доказать.

5.1.18.Т.У. Если в условиях предыдущей задачи Φ является определяющим множеством соотношений полугруппы A, то отображение φ можно продолжить до гомоморфизма полугруппы A в полугруппу B (см. гл. I, § 2).

5.1.19.Т.У. Пусть Φ_1 — определяющее множество соотношений полугруппы A_1 относительно порождающего множества K_1, а Φ_2 — определяющее множество соотношений полугруппы A_2 относительно порождающего множества K_2. Пусть существует взаимно однозначное отображение φ множества K_1 на множество K_2 такое, что если в каждом соотношении из Φ_1 заменить все элементы из K_1 их образами при отображении φ, то получим соотношения из Φ_2. Если еще каждое соотношение из Φ_2 можно получить таким способом, то полугруппы A_1 и A_2 изоморфны. Доказать.

5.1.20.У. Выяснить, будет ли коммутативной полугруппа с некоторым порождающим множеством K и определяющим множеством соотношений, состоящим из всевозможных соотношений вида

$$uvu = vuv \qquad (u, v \in K).$$

5.1.21. Пусть дана полугруппа $A = [a, b, c]_s$, и пусть следующее множество соотношений Ф:

$$a^2 = a, \qquad ab = ba, \qquad ac = ca, \qquad bc = c$$

является определяющим множеством соотношений полугруппы A. Доказать, что:

1) каждый элемент из A можно записать и притом единственным образом в виде $a^k c^m b^n$, где $k = 0,1$; m, n — произвольные целые неотрицательные числа, причем k, m, n не равны нулю одновременно;

2) A — полугруппа без единицы.

5.1.22. Пусть A — полугруппа, заданная в предыдущей задаче. Найти:

1) все идемпотенты полугруппы A (см. гл. II, §2);

2) все элементы из A, перестановочные с элементом $ac^m b^n$ (m, n — фиксированные натуральные числа);

3) типы всех моногенных подполугрупп A (см. 2.5.10).

5.1.23. Пусть дана полугруппа $A' = [a, b, c]$, и пусть множество Ф′, состоящее из всех соотношений множества Ф из задачи 5.1.21 и соотношения $c^5 = a$, является определяющим множеством соотношений полугруппы A'.

1) Доказать, что полугруппа A' является гомоморфным образом полугруппы A, определенной в задаче 5.1.21.

2) Найти тип каждого элемента полугруппы A' (см. 2.5.10).

3) Выяснить, какие элементы порождают моногенные подполугруппы полугруппы A', являющиеся группами.

5.1.24.У. Пусть A — свободная полугруппа. Доказать, что:

1) A не имеет единицы;

2) в полугруппе A выполняются свойства сократимости слева и справа (см. гл. II, §2);

3) каждый элемент A имеет лишь конечное число различных левых или правых делителей.

5.1.25. Доказать, что свободная полугруппа имеет лишь единственное неприводимое порождающее множество.

5.1.26. Пусть $A = [a, b]_s$ и следующее множество соотношений:

$$ba^2 = a, \qquad aba = a, \qquad bab = b, \qquad b^2a = b, \qquad (ba)^2 = ba$$

является определяющим для полугруппы A. Доказать, что:

1) элемент ba является единицей полугруппы A;

2) с элементом a перестановочны только степени a и единица ba;

3) с элементом b перестановочны только степени b и единица ba;

4) для всякого $u \in A$, $u \neq a$, b найдется неединичный элемент v, перестановочный с u и не являющийся степенью u.

5.1.27.У. Пусть A — полугруппа, определенная в предыдущей задаче. Найти:

1) все регулярные элементы полугруппы A (см. гл. II, § 5);

2) для каждого регулярного элемента найти регулярно сопряженные с ним элементы;

3) все автоморфизмы полугруппы A.

5.1.28. Доказать, что полугруппа $[u, v]_s$ из задачи 3.1.13 изоморфна полугруппе A, определенной в задаче 5.1.26.

§ 2. Определяющие множества соотношений в группах

Пусть G — группа и K — ее порождающее множество в смысле теории групп, т. е. $G = [K]_g$. Если K' — множество всех элементов из G, обратных для элементов множества K, то $G = [K \cup K']_s$ (см. гл. II, § 6).

Рассматривая группу G как полугруппу с порождающим множеством $K \cup K' \cup e$, где e есть единица G, мы можем применять к G все сказанное во введении к предыдущему параграфу (понятия слова и соотношения над порождающим множеством $K \cup K' \cup e$, следствия из множества соотношений, определяющего множества соотношений и т. д.).

Однако в теории групп применяется другая терминология. Слово в группе G над множеством $K \cup K' \cup e$ называют словом над множеством K, соотношение в G относительно $K \cup K' \cup e$ называют соотношением в G относительно K. Мы будем в дальнейшем придерживаться этой «групповой» терминологии, добавляя там, где могут возникнуть недоразумения, слова «в смысле теории групп» аналогично тому, как это делалось для порождающих множеств (см. гл. II, § 6).

Пусть $G = [K]_g$ и Φ — некоторое множество соотношений в группе G относительно K в смысле теории групп.

Соотношение $u=v$ называется следствием из множества соотношений Ф в смысле теории групп, если оно является следствием (см. § 1) из множества, состоящего из соотношений, принадлежащих Ф, и всех соотношений вида

$$ke=ek=k, \quad kk^{-1}=k^{-1}k=e \quad (k \in K \cup K' \cup e).$$

Таким образом, при выведении следствий из некоторого множества соотношений Ф в группе мы, помимо соотношений из Ф, будем использовать и естественные групповые соотношения, написанные выше.

Следует иметь в виду следующее простое, но важное обстоятельство. Если $x_1x_2 \ldots x_n = y_1y_2 \ldots y_m$ — некоторое соотношение в группе, то соотношение $x_1x_2 \ldots x_n y_m^{-1} \ldots y_1^{-1}=e$ является его следствием. И обратно, первое соотношение является следствием второго (см. 5.2.4). В связи с этим соотношения в группе чаще всего задают в виде $u=e$, где u — некоторое слово.

Отметим еще, что каждое из двух соотношений $z_1z_2 \ldots z_n=e$, $z_n^{-1} \ldots z_2^{-1}z_1^{-1}=e$ является следствием другого (см. 5.2.4).

Среди множеств соотношений в группе мы будем рассматривать и пустое множество соотношений. Если соотношение $u=v$ является следствием из пустого множества соотношений в смысле теории групп, то это значит, что оно является следствием (см. § 1) из естественных групповых соотношений, написанных выше.

Если каждое соотношение в группе G относительно порождающего множества K является следствием из некоторого множества соотношений Ф в смысле теории групп, то Ф называют определяющим множеством соотношений группы G относительно порождающего множества K.

Задание некоторого порождающего множества и определяющей совокупности соотношений группы в смысле теории групп определяет группу с точностью до изоморфизма (см. 5.2.7).

Следует отметить, что, как ясно видно из самих определений, теория соотношений в смысле теории групп является частным случаем теории соотношений в полугруппах. В теории групп, как уже отмечалось, употребляется только несколько иная терминология отчасти в целях некоторого упрощения в обозначениях, отчасти просто по традиции.

5.2.1. Пусть $a=(1\ 2)$, $b=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$. Проверить справедливость следующих соотношений в группе $[a, b]=S_5$:

$$a^2=e, \; b^5=e, \; (ab)^4=e, \; (ab^{-2}ab^2)^2=a^2, \; (ba)^4=e.$$

5.2.2. Пусть в некоторой группе $G=[u, v]$ выполняются следующие соотношения:

$$u^2=e, \; v^5=e, \; (uv)^4=e, \; (uv^{-2}uv^2)^2=u^2.$$

Доказать, что в группе G справедливы равенства

$$(vu)^4=e, \; uv^{-2}uv^2=v^{-2}uv^2u,$$
$$v^{-1}uv=v^3uv^{-1}uv^{-1}u, \; (uvuv^{-1})^3=e.$$

Примечание. Отсюда, в частности, следует, что в группе $[a, b]$ задачи 5.2.1 справедливы равенства

$$(ba)^4 = e, \quad ab^{-2}ab^2 = b^{-2}ab^2a,$$
$$b^{-1}ab = b^3ab^{-1}ab^{-1}a, \quad (abab^{-1})^3 = e.$$

Справедливость последних равенств в группе $[a, b]$ можно проверить и непосредственным вычислением, но после того, как решена задача 5.2.2, такая проверка не нужна.

5.2.3. Пусть в конечной группе G элементы x, y связаны соотношением $yx = xy^k$, где k — некоторое целое число $\neq 0$. Доказать, что всякий элемент группы $[x, y]$ можно записать в виде $x^m y^n$ (m, n — целые числа).

5.2.4.У. Пусть G — некоторая группа. Доказать, что:

1) если в G справедливо соотношение $x_1 x_2 \ldots x_n = y_1 y_2 \ldots y_m$, то справедливо и соотношение $x_1 x_2 \ldots x_n y_m^{-1} \ldots y_1^{-1} = e$, причем каждое из них является следствием другого в смысле теории групп;

2) если в G справедливо соотношение $z_1 z_2 \ldots z_n = e$, то справедливо и соотношение $z_n^{-1} \ldots z_2^{-1} z_1^{-1} = e$ и каждое из них является следствием другого в смысле теории групп.

5.2.5. Пусть в группе $G = [a, b]$ выполняются соотношения

$$a^4 = b^3 = (ab)^2 = e.$$

Доказать, что:

1) элементы a^2, $b^{-1}a^2b$, ba^2b^{-1} попарно перестановочны и образуют класс сопряженных элементов;

2) подгруппа $[a^2, b]$ является нормальным делителем G.

5.2.6. Пусть $G = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]$ и в группе G выполняются все соотношения вида

$$a_k a_j = a_j a_k \qquad (k, j = 1, \ldots, n-1; \ |k - j| > 1),$$
$$a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Доказать, что:

1) в G справедливы следующие равенства:

$$a_i^{-1} a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}^{-1}, \quad a_i b = b a_{i-1}, \quad a_1 b^2 = b^2 a_{n-1},$$

где $b = a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$, a_i — любое;

2) элемент b^n принадлежит центру группы G.

5.2.7.Т.У. Пусть даны группы:

$$G_1 = [K_1]_g = [K_1 \cup K_1' \cup e_1]_s,$$
$$G_2 = [K_2]_g = [K_2 \cup K_2' \cup e_2]_s$$

и Φ_1, Φ_2 — определяющие множества соотношений групп G_1, G_2 относительно порождающих множеств K_1, K_2 соответственно в смысле теории групп. Если существует взаимно однозначное отображение φ множества $K_1 \cup K_1' \cup e_1$ на множество $K_2 \cup K_2' \cup e_2$, при котором

$$\varphi(e_1) = e_2, \ \varphi(k_1^{-1}) = [\varphi(k_1)]^{-1} \qquad (k_1 \in K_1),$$

и множество Φ_1 взаимно однозначно отображается на множество Φ_2, то группы G_1, G_2 изоморфны. Доказать.

5.2.8.Т.У. Пусть дана группа $G = [K]_g = [K \cup K' \cup e]_s$ и Φ — определяющее множество соотношений группы G относительно порождающего множества K в смысле теории групп. Пусть φ — отображение множества $K \cup K' \cup e$ в группу G', при котором каждое соотношение из Φ и каждое соотношение вида $ke = ek = k$, $kk^{-1} = k^{-1}k = e$ ($k \in K \cup K' \cup e$) преобразуется в справедливое соотношение в G'. Доказать, что если $G' = [\varphi(K)]_g$, то G' изоморфна некоторой фактор-группе группы G.

5.2.9. Пусть $a = (1234)$, $b = (132)$ — элементы симметрической группы S_4. Доказать, что:

1) $S_4 = [a, b]$;

2) в S_4 выполняются соотношения:

$$a^4 = b^3 = (ab)^2 = e.$$

5.2.10. Пусть G — группа из задачи 5.2.5, и пусть $c = a^2ba^{-1}$. Доказать справедливость следующих равенств в группе G:

$$c^2 = e, \ a^{-1}b^{-1}a^{-1} = b, \ b^{-1}c = cb, \ bc = cb^{-1}, \ ac = cb^{-1}a,$$
$$a^{-1}c = b^{-1}a^2, \ a^{-1}b = bca^2, \ a^2b = ca, \ ab^{-1} = ca^2.$$

5.2.11. Пусть сохраняются условия и обозначения предыдущей задачи. Доказать, что каждый элемент группы G можно записать в виде $c^{\alpha_1}b^{\alpha_2}a^{\alpha_3}$, где $0 \leqslant \alpha_i \leqslant i$, $i = 1, 2, 3$.

5.2.12. Пусть сохраняются условия и обозначения задачи 5.2.10. Если в группе G равенства

$$c^{\alpha_1}b^{\alpha_2}a^{\alpha_3} = c^{\beta_1}b^{\beta_2}a^{\beta_3} \, (0 \leqslant \alpha_i \leqslant i, \ 0 \leqslant \beta_i \leqslant i, \ i = 1, 2, 3)$$

выполняются только тогда, когда $\alpha_1=\beta_1$, $\alpha_2=\beta_2$, $\alpha_3=\beta_3$, то следующая совокупность соотношений:

$$a^4=b^3=(ab)^2=e$$

является определяющей в группе G. Доказать.

5.2.13.У. Доказать, что следующее множество соотношений:

$$a^4=b^3=(ab)^2=e$$

является определяющим для симметрической группы S_4 относительно порождающего множества $\{a, b\}$, где $a=(1234)$, $b=(132)$.

Примечание. В последующих задачах на нахождение определяющих множеств соотношений групп полезно иметь в виду задачи 5.2.11, 5.2.12.

5.2.14. Пусть K — группа кватернионов (см. 2.6.39). Доказать, что:

1) $K=[i, j]$;

2) в K справедливы все соотношения следующего множества Φ:

$$\{i^4=1,\ j^4=1,\ i^2=j^2,\ iji=j\}.$$

5.2.15. Доказать, что множество соотношений Φ из предыдущей задачи является определяющим множеством соотношений группы кватернионов.

5.2.16. Пусть $G_1=[a, b, c]\subset S_6$, где $a=(1\ 2)$, $b=(3\ 4)$, $c=(5\ 6)$. Доказать, что следующее множество соотношений Φ:

$$a^2=b^2=c^2=e,\ ab=ba,\ ac=ca,\ bc=cb$$

является определяющим множеством соотношений группы G_1 относительно порождающего множества $\{a, b, c\}$.

5.2.17. Пусть $G_2=[a, b]\subset S_6$, где $a=(1\ 2\ 3\ 4)$, $b=(5\ 6)$. Доказать, что следующее множество соотношений Φ:

$$a^4=b^2=e, \qquad ab=ba$$

является определяющим множеством соотношений группы G относительно порождающего множества $\{a, b\}$.

5.2.18. Пусть в группе $G=[a, b]$ выполняются следующие соотношения:

$$a^2=b^2=(ab)^4=e.$$

Доказать, что:

1) порядок группы G не больше восьми;

2) элемент $(ab)^2$ принадлежит центру группы G.

5.2.19. Пусть $G=[(1234), (13)]$ и $a=(12)(34)$, $b=(13)$. Доказать, что $G=[a, b]$ и множество соотношений: $a^2=b^2=(ab)^4=e$ является определяющим для группы G.

5.2.20. Пусть G — группа из задачи 4.6.16. Доказать, что $G=[z_1, z_2]$ и что множество соотношений $z_1^2=z_0, z_1z_2=z_2^{-1}z_1$ (где z_0 — единица группы) является определяющим для группы G.

5.2.21.У. Пусть $[a]$, $[b]$ — бесконечные циклические группы; G — множество всевозможных пар вида (a^α, b^β), где $a^\alpha \in [a]$, $b^\beta \in [b]$. В множестве G определено действие

$$(a^{\alpha_1}, b^{\beta_1})(a^{\alpha_2}, b^{\beta_2})=(a^{\alpha_1+\alpha_2}, b^{\beta_1(-1)^{\alpha_2}+\beta_2}).$$

Доказать, что:

1) G — группа;

2) если $c=(a, b^0)$ $d=(a^0, b)$, то $G=[c, d]$ и множество, состоящее из одного соотношения $dc=cd^{-1}$, является определяющим для группы G.

5.2.22.У. Пусть $[a]$, $[b]$ — циклические группы, порядки которых соответственно равны m, n, а r — натуральное число. Пусть G_r^{mn} — множество mn пар вида (a^α, b^β), где $a^\alpha \in [a]$, $b^\beta \in [b]$, в котором определено следующее действие:

$$(a^{\alpha_1}, b^{\beta_1})(a^{\alpha_2}, b^{\beta_2})=(a^{\alpha_3}, b^{\beta_3}),$$

где

$$\alpha_3 \equiv \alpha_1+\alpha_2 \pmod m, \quad \beta_3 \equiv \beta_1 r^{\alpha_2}+\beta_2 \pmod n.$$

Доказать, что:

1) G_r^{mn} является группой тогда и только тогда, когда $r^m \equiv 1 \pmod n$;

2) если G_r^{mn} — группа, то $G_r^{mn}=[c, d]$, где $c=(a, b^0)$, $d=(a^0, b)$;

3) множество соотношений

$$c^m=e, \ d^n=e, \ d=cd^rc^{-1},$$

где e — единица G_r^{mn}, является определяющим множеством соотношений группы G_r^{mn}.

5.2.23.У. Пусть p, q — простые числа и $p<q$. Доказать, что группы G_r^{pq}, G_s^{pq} из предыдущей задачи изоморфны при любых r, s, удовлетворяющих условию

$$r^p \equiv 1 \pmod q, \ s^p \equiv 1 \pmod q.$$

§ 3. Свободные группы

Порождающее множество K группы G называется *свободным* порождающим множеством, если все его элементы отличны от единицы и пустое множество соотношений относительно K является определяющим множеством соотношений группы G в смысле теории групп.

Как отмечалось в § 2, это означает, что каждое соотношение в группе G относительно K является следствием естественных групповых соотношений: $ke = ek = k$, $kk^{-1} = k^{-1}k = e$, где $k \in K$, или k является обратным для некоторого элемента из K, или $k = e$.

Группа, обладающая свободным порождающим множеством, называется *свободной.*

Будет доказано (см. 5.6.31), что если свободная группа обладает свободным порождающим множеством, состоящим из n элементов, то и любое другое свободное порождающее множество состоит из n элементов.

Число элементов свободного порождающего множества свободной группы называется ее *рангом.*

Если свободные порождающие множества бесконечны, то говорят о свободной группе бесконечного ранга.

В задачах 5.3.1 — 5.3.6 указан способ построения свободных групп, из которого следует, что существуют свободные группы любого ранга.

Свободные группы играют в теории групп весьма важную роль в связи с тем, что каждая группа изоморфна фактор-группе некоторой свободной группы (см. 5.3.13). Кроме того, понятие свободной группы иногда используется при определении понятия определяющего множества соотношений в группе (см. 5.3.15, 5.3.16).

Учитывая введенный ранее термин «свободная полугруппа» (см. § 1), следует иметь в виду следующее. Свободная полугруппа никогда не является группой. Свободная же группа, конечно, является полугруппой, но она не является свободной полугруппой (см. 5.3.21).

5.3.1. Пусть F_K — свободная полугруппа со свободным порождающим множеством K, и пусть существует взаимно однозначное отображение φ множества K на себя, удовлетворяющее условию $\varphi(k) \neq k$, $\varphi^2(k) = k$ для любого $k \in K$. В F_K определено бинарное отношение ρ, состоящее из всевозможных пар вида

$(w_1, k\varphi(k)w_1)$, $(w_2, w_2k\varphi(k))$, $(w_1w_2, w_1k\varphi(k)w_2)$, (w_1, w_1), $(k\varphi(k)w_1, w_1)$, $(w_2k\varphi(k), w_2)$, $(w_1k\varphi(k)w_2, w_1w_2)$, где $k \in K$, $w_1, w_2 \in F_K$. Доказать, что:

1) ρ — рефлексивное симметричное бинарное отношение;

2) транзитивное замыкание ρ' бинарного отношения ρ является двусторонне стабильной эквивалентностью в полугруппе F_K (см. 1.3.10).

Примечание. Согласно задачам 2.4.18, 2.4.14, 2.4.8 множество $\bar{F}_K = F_K/\rho'$ является полугруппой.

5.3.2. Пусть сохраняются условия и обозначения предыдущей задачи. Доказать, что если $k_1, k_2 \in K$, $k_1 \neq k_2$, то $(k_1, k_2) \notin \rho'$.

5.3.3. Пусть сохраняются условия и обозначения задачи 5.3.1. Доказать, что полугруппа $\bar{F}_K = F_K/\rho'$ является группой. Какой класс является единицей этой группы? Что представляет собой элемент, обратный классу, содержащему некоторый $k \in K$.

5.3.4.У. Доказать, что группа $\bar{F}_K$ из предыдущей задачи свободная.

5.3.5. Доказать, что если K, L — равномощные множества, то группы $\bar{F}_K$, $\bar{F}_L$, определенные в задаче 5.3.3, изоморфны.

5.3.6. Если G — свободная группа, то найдется множество K такое, что G изоморфна группе $\bar{F}_K$ из задачи 5.3.3. Доказать.

Примечание. Таким образом, все свободные группы с точностью до изоморфизма исчерпываются группами типа $\bar{F}_K$.

5.3.7. Пусть F — свободная группа, $\{a, b\}$ — ее свободное порождающее множество. Доказать, что нормальный делитель группы F, порожденный элементами a^2, b^2, $(ab)^2$ (см. гл. IV, § 3), состоит из всех тех слов $a^{\alpha_1}b^{\beta_1}a^{\alpha_2}b^{\beta_2} \ldots a^{\alpha_k}b^{\beta_k}$, у которых $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ и $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$ — четные числа.

5.3.8.У. Пусть F — свободная группа, $\{a, b\}$ — ее свободное порождающее множество. Найти индексы следующих подгрупп F:

1) $H_1 = [a^2, b^2, ab]$;

2) $H_2 = [a]$;

3) $H_3 = [a^2, b^2, a^{-1}b^2a, b^{-1}a^2b, (ab)^2]$.

Какие из этих подгрупп являются нормальными делителями группы F?

5.3.9. Выяснить, какие свободные группы коммутативны.

5.3.10. Пусть F — свободная группа ранга, большего единицы. Доказать, что:

1) каждый неединичный элемент группы F имеет бесконечный порядок;

2) центр группы F есть единичная подгруппа.

5.3.11. Пусть F — свободная группа со свободным порождающим множеством K. Доказать, что каждое отображение множества K в F можно продолжить до эндоморфизма группы F (см. гл. I, § 2; гл. III, § 4).

5.3.12.У. Доказать, что каждая свободная группа неединичного ранга обладает бесконечным числом свободных порождающих множеств.

5.3.13.Т.У. Пусть $G=[K]$ — группа. Доказать, что G является гомоморфным образом некоторой свободной группы, которая обладает свободным порождающим множеством, равномощным множеству K.

5.3.14. Пусть φ — гомоморфизм свободной группы F со свободным порождающим множеством K на группу G, и пусть $\overline{K}$ — порождающее множество G, состоящее из всех элементов $\varphi(x)$ $(x \in K)$. Пусть H — нормальный делитель F, состоящий из элементов, преобразующихся в единицу при гомоморфизме φ. Доказать, что:

1) если $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}\in H$, то в G выполняется соотношение $\varphi(x_1)^{\alpha_1}\varphi(x_2)^{\alpha_2}\ldots\varphi(x_n)^{\alpha_n}=e$ относительно $\overline{K}$;

2) если для некоторых $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in K$ в группе G выполняется следующее соотношение относительно $\overline{K}$:

$$\varphi(x_1)^{\alpha_1}\ldots\varphi(x_n)^{\alpha_n}=\varphi(y_1)^{\beta_1}\ldots\varphi(y_n)^{\beta_m},$$

то $x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}y_m^{-\beta_m}\ldots y_1^{-\beta_1}\in H$.

Примечание. Если $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}\in H$, то соотношение $\varphi(x_1)^{\alpha_1}\varphi(x_2)^{\alpha_2}\ldots\varphi(x_n)^{\alpha_n}=e$ будем называть *соответствующим* элементу u свободной группы F.

5.3.15. Пусть сохраняются условия и обозначения предыдущей задачи, причем нормальный делитель H порождается некоторым множеством M (см. гл. IV, § 3). Доказать, что множество всех соотношений в G, соответствующих элементам множества M, является определяющим множеством соотношений группы G относительно порождающего множества $\overline{K}$.

5.3.16. Пусть сохраняются условия и обозначения задачи 5.3.14, и пусть Φ — определяющее множество соотношений группы G относительно порождающего множества $\overline{K}$, состо-

ящее из соотношений вида $u=e$. Доказать, что множество всех элементов группы F, каждому из которых соответствует некоторое соотношение из Φ, порождает нормальный делитель H (см. гл. IV, § 3).

Примечание. Множество соотношений в группе G, соответствующих элементам из M (см. 5.3.15), иногда и называют определяющим множеством соотношений группы G.

5.3.17.У. Пусть F — свободная группа ранга n, и пусть H — подгруппа F, порожденная квадратами всех элементов F. Проверить, что H — нормальный делитель F, и найти порядок фактор-группы F/H.

5.3.18. Пусть H — нормальный делитель из предыдущей задачи. Доказать, что если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — свободное порождающее множество группы F, то H как нормальный делитель порождается множеством

$$\{x_1^2, \ldots, x_n^2, (x_1x_2)^2, \ldots, (x_{n-1}x_n)^2\} \qquad \text{(см. гл. IV, § 3).}$$

5.3.19.У. Пусть $\{x, y\}$ — свободное порождающее множество группы F, а H — вполне характеристическая подгруппа F, содержащая элемент x^2yxy^{-1}. Доказать, что если $H \neq F$, то индекс H в группе F равен 9.

5.3.20. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — свободное порождающее множество группы F. Доказать, что следующие отображения множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ на себя можно продолжить до автоморфизмов F:

1) $\varphi_{ij}(x_i)=x_j,\ \varphi_{ij}(x_j)=x_i,\ \varphi_{ij}(x_k)=x_k,$ если $k \neq i, j$;
2) $\psi_i(x_i)=x_i^{-1},\ \psi_i(x_j)=x_j,$ если $i \neq j$;
3) $\theta_{ij}(x_j)=x_ix_j\ (i \neq j),\ \theta_{ij}(x_k)=x_k,$ если $k \neq j$,

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (см. гл. I, § 2).

Примечание. Известно, что эти автоморфизмы порождают всю группу автоморфизмов свободной группы F.

5.3.21. Доказать, что свободная группа не является свободной полугруппой.

5.3.22. Для того чтобы группа F была свободной, необходимо и достаточно, чтобы она имела порождающее множество, всякое отображение которого в произвольную группу можно продолжить до гомоморфизма группы F в эту группу. Доказать.

§ 4. Группы, заданные определяющими множествами соотношений

Пусть K — произвольное множество. *Словом* над K называется всякая конечная последовательность элементов из K, написанных рядом без каких-либо разделяющих знаков.

Понятие слова над множеством встречается у нас не впервые (см. гл. II, § 5; гл. V), но до сих пор мы рассматривали слова только над такими множествами, которые являлись подмножествами полугрупп.

Для данного множества K выбираем произвольное, но фиксированное множество K', равномощное K и не пересекающееся с K, некоторое фиксированное взаимно однозначное отображение φ множества K на K' и элемент $e \notin K \cup K'$. В множестве всех слов над $K \cup K' \cup e$ возьмем произвольное бинарное отношение ρ.

Возникает вопрос, существует ли группа, в которой K является порождающим множеством, элемент e является единицей, $\varphi(k)$ является элементом, обратным k для любого $k \in K$, а множество, состоящее из всех соотношений $u_1 = u_2$, где $(u_1, u_2) \in \rho$, является определяющим для этой группы в смысле теории групп.

Оказывается, что такая группа существует (см. 5.4.1). При этом согласно задаче 5.2.7 она будет единственной с точностью до изоморфизма.

Следует иметь в виду, что в этой группе некоторые элементы множества K могут оказаться равными. В частности, группа может быть и единичной.

С другой стороны, если G — некоторая группа и K — ее порождающее множество, то существует определяющее множество соотношений G относительно K в смысле теории групп. Таким множеством соотношений может служить, например, множество всех соотношений в G относительно K.

Если K — порождающее множество, а Φ — определяющее множество соотношений группы G относительно K, то будем говорить, что G задана порождающим множеством K и определяющим множеством соотношений Φ.

Для групп, заданных порождающими множествами и совокупностями определяющих соотношений, естественно возникают некоторые специфические вопросы. Важнейшим среди них является вопрос: как узнать, имеют ли одинаковые значения два данных слова в группе относительно заданного порождающего множества или нет. Если G — конкретная группа, т. е. известно, из каких объектов состоит G и как перемножаются ее элементы, то соответствующего вопроса не возникает. В самом деле, вычисляя значения данных слов в G, мы всегда узнаем, равны они или нет.

Если указан способ (алгоритм), при помощи которого для любых двух слов можно дать ответ, равны их значения в группе G или нет, то говорят, что в группе *G решена проблема тождества.* Известно, что решение проблемы тождества часто связано с большими трудностями и что для некоторых классов групп проблема тождества не разрешима вообще, т. е. указанного выше общего алгоритма для всех пар слов не существует.

Вторым важнейшим вопросом является вопрос о том, изоморфны ли две группы, заданные порождающими множествами и определяющими совокупностями соотношений. Наконец, возникают такие вопросы: если G задана некоторым порождающим множеством и некоторой определяющей совокупностью соотношений, то конечна G или бесконечна, G — единичная группа или не единичная, коммутативная группа или нет.

5.4.1.Т.У. Пусть K — произвольное множество, K' — некоторое множество, равномощное K и не пересекающееся с K, и $e \notin K \cup K'$. Пусть φ — взаимно однозначное отображение K на K'. Для произвольного бинарного отношения ρ в множестве всех слов над множеством $K \cup K' \cup e$ существует группа G такая, что $G = [K]_g$, элемент e является единицей G, для любого $k \in K$ выполняется $\varphi(k) = k^{-1}$ и множество, состоящее из всех соотношений $u_1 = u_2$, где $(u_1, u_2) \in \rho$, является определяющим множеством соотношений группы G относительно K. Доказать.

5.4.2.Т. Пусть группа G_1 задана порождающим множеством K и определяющим множеством соотношений Φ_1, группа G_2 задана тем же порождающим множеством K и определяющим множеством соотношений Φ_2. Доказать, что если $\Phi_1 \subset \Phi_2$, то:

1) G_2 является гомоморфным образом G_1;

2) если каждое соотношение из Φ_2 является следствием из множества соотношений Φ_1, то G_2 изоморфна G_1.

5.4.3.У. Выяснить, какие из следующих групп коммутативны:

1) G_1, заданная порождающим множеством $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ и определяющим множеством соотношений:

$$x_2^2 = x_1, \quad x_3^2 = x_2, \ \ldots, \ x_n^2 = x_{n-1}, \ \ldots;$$

2) G_2, заданная порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющим множеством соотношений $xy^2 = y^2x$;

3) G_3, заданная порождающим множеством $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ и определяющим множеством соотношений

$$x_1^2 = x_2^2, \ x_1^2 = x_3^2, \ldots, \ x_1^2 = x_n^2, \ \ldots$$

5.4.4.У. Доказать, что группы G_1, G_2, G_3 предыдущей задачи бесконечны.

5.4.5.У. Определить порядок группы, заданной порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющей совокупностью соотношений

$$xyx^{-2}yx = e, \quad y^3 = e.$$

5.4.6.У. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющим множеством соотношений, состоящим из одного соотношения $xy = yx^s$, где s — произвольное целое число, отличное от нуля. Найти порядок подгруппы $[y]$.

5.4.7.У. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющей совокупностью соотношений: $x^2 = y^2$. Выяснить, какие из следующих элементов G равны и какие различны:

$$u_1 = (xy)^3, \quad u_2 = yxyxy^2, \quad u_3 = x^3y^3, \quad u_4 = xy^2x^3,$$
$$u_5 = x^2y^{-1}x^3yx, \quad u_6 = x^{-1}yx^6.$$

5.4.8.У. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющим множеством соотношений

$$x^2 = y^2, \quad xy^6 = y^3x^4.$$

Выяснить, какие из следующих элементов G равны и какие различны:

$$v_1 = x^{-1}y^{-1}xy, \quad v_2 = x^4, \quad v_3 = y^4, \quad v_4 = xy^{-1}xy^{-1}xy^{-1},$$
$$v_5 = x^2y^2, \ v_6 = (xy)^3, \ v_7 = x^3y^3, \ v_8 = x^{-1}yx^6.$$

Примечание. Результат сопоставить с результатом задачи 5.4.7.

5.4.9. Пусть группа $G = [K]$, где K — конечное множество, и множество всех соотношений вида

$$x^2 = e, \quad (xy)^2 = e \qquad (x, y \in K)$$

является определяющим для группы G. Доказать, что группа G конечна, и найти ее порядок.

5.4.10.У. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющим множеством соотношений $xy = y^{-1}x$, $x^2 = y^2$.

1) Доказать, что всякий элемент G можно записать в виде $x^\varepsilon y^m$, где $\varepsilon = 0, 1$; m — любое целое число.

2) Найти, когда элементы $x^{\varepsilon_1}y^{m_1}$, $x^{\varepsilon_2}y^{m_2}$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1$; m_1, m_2 — целые) равны и когда один из них является обратным для другого.

5.4.11. Доказать, что группа $G = [a, b]$ с определяющим множеством соотношений

$$a^3 = e, \quad b^7 = e, \quad a^{-1}ba = b^3$$

является циклической группой третьего порядка.

5.4.12. Пусть группа G задана порождающим множеством K и определяющей совокупностью соотношений Φ и пусть $y = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$, где $y \in G$, $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$. Доказать, что $K' = K \cup \{y\}$ является порождающим множеством G и что множество соотношений, состоящее из соотношений Φ и соотношения $y = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$, является определяющим множеством соотношений группы G относительно порождающего множества K'.

5.4.13.Т. Пусть группа G задана порождающим множеством K и определяющей совокупностью соотношений Φ, которая содержит соотношение вида $y = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$ ($y, x_1, \ldots, x_m \in K$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — целые числа). Пусть Φ' — множество соотношений, полученных подстановкой во все соотношения из Φ вместо y слова $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$. Доказать, что множество $K' = K \setminus \{y\}$ порождает группу G и что Φ' является определяющим множеством соотношений группы G относительно порождающего множества K'.

5.4.14.У. Выяснить, сколько элементов конечного порядка и сколько элементов бесконечного порядка имеет группа, заданная порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющей совокупностью соотношений, состоящей из одного соотношения

$$(xy)^k = e \qquad (k \text{ натуральное}).$$

5.4.15.У. Найти все элементы конечного порядка в группе, заданной порождающим множеством $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и определяющей совокупностью соотношений

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^2 = e.$$

5.4.16.У. Пусть $G_1 = [x, y_1, y_2, y_3]$ и следующая совокупность соотношений:

$$x^{-1} y_1 x y_2 = x^{-1} y_2 x y_3 = x^{-1} y_3 x y_1 = e,$$
$$x^3 = y_1^2 = y_2^2 = y_3^2 = e, \quad y_1 y_2 = y_2 y_1, \quad y_1 y_2 y_3 = e$$

является определяющей совокупностью соотношений группы G_1. Доказать, что группа G_1 изоморфна группе G_2, заданной порождающим множеством $\{a, b_1, b_2\}$ и определяющим множеством соотношений

$$a^3 = b_1^2 = b_2^2 = e, \quad (b_1 b_2)^2 = e, \quad b_1 a = a b_2, \quad b_2 a = a b_1 b_2.$$

5.4.17. Пусть группа G задана порождающим множеством K и определяющей совокупностью соотношений, состоящей из одного соотношения вида

$$x_1 x_2 \ldots x_n = x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_m,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — различные элементы из K. Доказать, что G — свободная группа.

5.4.18.У. Пусть дана группа $G = [a, b]$, для которой совокупность соотношений $a^2 = b^2 = (ab)^4 = e$ является определяющей. Найти:

1) число порождающих множеств G, состоящих каждое из двух элементов;

2) центр группы G;

3) группу автоморфизмов G.

5.4.19. Пусть G — коммутативная группа восьмого порядка. Доказать, что если G — нециклическая группа, то или G обладает порождающим множеством из двух элементов a, b, относительно которого выполняются соотношения $a^4 = b^2 = e$, или G обладает порождающим множеством из трех элементов a, b, c, относительно которого выполняются соотношения $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

5.4.20.У. Найти количество неизоморфных коммутативных групп восьмого порядка.

5.4.21. Пусть G — некоммутативная группа восьмого порядка. Доказать, что:

1) G не содержит элементов восьмого порядка;

2) G содержит элемент четвертого порядка;

3) если $b \notin [a]$, где a — элемент четвертого порядка, то выполняется равенство $b^{-1}ab = a^3$;

4) если $b \notin [a]$, где a — элемент четвертого порядка и $b^2 \neq e$, то $b^2 = a^2$.

5.4.22.У. Пусть G — некоммутативная группа восьмого порядка. Доказать, что G изоморфна группе кватернионов или G изоморфна группе [(1234), (13)] (см. 2.6.39).

5.4.23.У. Сколько существует неизоморфных групп восьмого порядка?

5.4.24.У. Пусть p, q $(p < q)$ — натуральные простые числа и G — нециклическая группа порядка pq. Доказать, что:

1) G обладает единственной подгруппой порядка q, которая является нормальным делителем группы G;

2) G обладает q подгруппами порядка p.

5.4.25.У. Пусть G — группа, определенная в предыдущей задаче. Доказать, что найдутся a, $b \in G$ такие, что $G = [a, b]$ и в G справедливы соотношения

$$a^p = e, \ b^q = e, \ a^{-1}ba = b^r,$$

где $r \not\equiv 1 \pmod q$, $r^p \equiv 1 \pmod q$.

5.4.26.У. Доказать, что каждая нециклическая группа порядка pq, где p, q — различные простые числа и $p < q$, изоморфна некоторой группе G_r^{pq} из задачи 5.2.22.

5.4.27.У. Пусть p, q — неравные простые натуральные числа. Доказать, что существует не более двух неизоморфных групп порядка pq. Описать их строение.

5.4.28.У. Сколько существует неизоморфных групп порядков 14, 15?

5.4.29.У. Найти число $\sigma(n)$ не изоморфных между собою групп порядка n для $n \leqslant 10$.

§ 5. Свободные произведения групп

Группа G называется *свободным произведением* своих подгрупп G_α, G_β, …, G_ξ, … ($\xi \in \Gamma$, мощность Γ не меньше 2), если:

1) ни одна из G_ξ не является единичной подгруппой;

2) для всяких α, $\beta \in \Gamma$ ($\alpha \neq \beta$) имеет место $G_\alpha \cap G_\beta = e$;

3) множество $G' = \bigcup\limits_{\xi \in \Gamma} G_\xi$ является порождающим множеством группы G;

4) совокупность соотношений, состоящая из всех соотношений между элементами из G_α, всех соотношений между элементами из G_β и т. д., является определяющей совокупностью соотношений группы G относительно порождающего множества G'.

Представление группы G в виде свободного произведения подгрупп G_α, G_β, … G_ξ, … ($\xi \in \Gamma$) называется разложением группы G в свободное произведение и записывается в виде

$$G = \prod_{\xi \in \Gamma}{}^{*} G_\xi, \text{ или } G = G_\alpha * G_\beta * \ldots * G_\xi * \ldots$$

Существует и другое, более часто употребляемое эквивалентное определение свободного произведения подгрупп (см. 5.5.10, 5.5.11).

5.5.1. Группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и определяющим множеством соотношений $a_1^3 = e$, $a_2^5 = e$, $a_3^7 = e$, $a_4^{12} = e$. Разложима ли группа G в свободное произведение?

5.5.2. Какие свободные группы разложимы в свободное произведение?

5.5.3. Пусть G — свободное произведение подгрупп A и B, каждая из которых является свободной группой. Доказать, что G — свободная группа.

5.5.4. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3\}$ и определяющим множеством соотношений $a_1^3 = a_2$; $a_3^7 = e$; пусть также G_i $(i = 1, \ldots, 4)$ — подгруппы G такие, что $G_1 = [a_1, a_2]$, $G_2 = [a_2]$, $G_3 = [a_2, a_3]$, $G_4 = [a_3]$. Какие из совокупностей подгрупп G_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ образуют свободное произведение G.

5.5.5. Группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3\}$ и определяющей совокупностью соотношений $a_1^3 = e$. Доказать, что G есть свободное произведение циклической группы порядка 3 и двух бесконечных циклических групп.

5.5.6. Существует ли абелева группа, разложимая в свободное произведение своих подгрупп?

5.5.7. Группа G есть свободное произведение подгруппы $A = [a_1, a_2, a_3]$ с множеством определяющих соотношений $a_1 a_2^{-1} = a_2^2$; $a_1^2 = a_3^2$ и подгруппы $B = [b_1, b_2]$ с множеством определяющих соотношений $b_1^3 = b_1 b_2^2$. Доказать, что множество $M = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$ является порождающим множеством группы G, а совокупность $a_1 a_2^{-1} = a_2^2$, $a_1^2 = a_3^2$, $b_1^3 = b_1 b_2^2$ является определяющей совокупностью соотношений группы G относительно порождающего множества M.

5.5.8. Пусть G есть свободное произведение двух конечных подгрупп. Может ли G быть конечной группой?

5.5.9. Пусть $G = \prod_{\xi \in \Gamma}^{*} G_{\xi}$, причем каждый неединичный элемент $a \in \bigcup_{\xi \in \Gamma} G_{\xi}$ имеет бесконечный порядок. Существуют ли в G неединичные элементы конечного порядка?

5.5.10.Т. Пусть в группе G существуют неединичные подгруппы G_{α} $(\alpha \in \Gamma)$, удовлетворяющие следующему условию: каждый элемент $g \in G$ $(g \neq e)$ представим и притом единственным образом в виде

$$g = a_1 a_2 \ldots a_n; \quad a_i \neq e; \quad a_i \in G_{\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Доказать, что $G = \prod_{\alpha \in \Gamma}^{*} G_{\alpha}$.

5.5.11.Т. Пусть $G = \prod_{\alpha \in \Gamma}^{*} G_{\alpha}$; тогда каждый элемент $g \in G$ $(g \neq e)$ представим и притом единственным образом в

виде

$$g = a_1 a_2 \ldots a_n; \quad a_i \neq e; \quad a_i \in G_{\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Доказать.

5.5.12. Пусть $G = \prod\limits_{\alpha \in \Gamma}^{*} G_\alpha$, и пусть в каждой подгруппе G_α выбрана неединичная подгруппа G'_α. Тогда подгруппа $G' \subset G$, порожденная всеми подгруппами G'_α, будет свободным произведением подгрупп G'_α ($\alpha \in \Gamma$). Доказать.

5.5.13.Т. Пусть $G = G_1 * G_2$ и N — нормальный делитель, порожденный подгруппой G_2 (см. гл. IV, § 3). Доказать, что G_1 изоморфна G/N.

5.5.14 Пусть A, B, C — подгруппы группы G, и пусть $G = A * B$, $G = A * C$. Всегда ли изоморфны подгруппы B и C?

5.5.15. Пусть группа G является свободным произведением двух циклических подгрупп порядков 5 и 7. Будет ли G периодической группой (см. гл. II, § 6)?

5.5.16. Пусть группа G является свободным произведением конечного числа подгрупп, каждая из которых имеет конечное порождающее множество. Доказать, что G обладает конечным порождающим множеством.

5.5.17. Группу G называют полной, если для всякого ее элемента a и всякого натурального числа n в группе G разрешимо уравнение $x^n = a$. Когда группа, раскладывающаяся в свободное произведение полных подгрупп, является полной группой?

5.5.18. Чему равен центр свободного произведения групп?

5.5.19. Пусть $G = A * B$, и пусть $a \neq e$, $b \neq e$ и $a \in A$, $b \in B$. Может ли элемент ab принадлежать A?

5.5.20.У. Пусть G есть совокупность всех частичных преобразований A множества комплексных чисел K, определяемых формулой

$$A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (z \in K)$$

(a, b, c, d — целые рациональные числа и $ad - bc = 1$). Доказать, что относительно действия, определенного так же, как и в задаче 3.6.25, G образует группу, которая раскладывается в свободное произведение циклической группы порядка 2 и циклической группы порядка 3.

5.5.21. Пусть $G = G_1 * G_2$, и пусть G'_1 и G'_2 — собственные подгруппы группы G' такие, что G'_1 изоморфна G_1, G'_2 изо-

морфна G_2 и $G'=[G'_1, G'_2]$. Существует ли гомоморфизм группы G на группу G'?

5.5.22. Пусть $G=G_1*G_2*G_3$. Доказать, что

$$G=G_1*(G_2*G_3)=(G_1*G_2)*G_3.$$

5.5.23. Пусть G — свободная нециклическая группа. Доказать, что существует бесконечно много разложений группы G в свободное произведение своих подгрупп.

5.5.24.Т.У. Пусть дана произвольная совокупность неединичных групп G_ξ $(\xi\in\Gamma)$ с числом групп, не меньшим двух. Доказать, что существует группа G, обладающая подгруппами $\overline{G}_\xi$ $(\xi\in\Gamma)$, изоморфными группам G_ξ $(\xi\in\Gamma)$, и являющаяся их свободным произведением.

§ 6. Прямые произведения групп

Говорят, что группа G является *прямым произведением* своих подгрупп $G_\alpha, G_\beta, \ldots, G_\xi, \ldots$ $(\xi\in\Gamma)$, если:

1) для всяких $\alpha, \beta\in\Gamma$ $(\alpha\neq\beta)$ имеет место $G_\alpha\cap G_\beta=e$;

2) множество $G'=\bigcup\limits_{\xi\in\Gamma} G_\xi$ является порождающим множеством группы G;

3) для всяких $a_\xi\in G_\xi$ и $a_\eta\in G_\eta$ $(\xi\neq\eta;\ \xi, \eta\in\Gamma)$ имеет место $a_\xi a_\eta=a_\eta a_\xi$ и совокупность этих соотношений совместно со всеми соотношениями из G_α, всеми соотношениями из G_β и т. д. является определяющей совокупностью соотношений группы G относительно порождающего множества G'.

Существуют и другие, более часто употребляемые эквивалентные определения прямого произведения (см. 5.6.13 и 5.6.14; 5.6.30). Представление группы G в виде прямого произведения подгрупп $G_\alpha, G_\beta, \ldots, G_\xi, \ldots$ называется *разложением* группы G в прямое произведение и записывается в виде

$$G=\prod_{\xi\in\Gamma} G_\xi, \text{ или } G=G_\alpha\times G_\beta\times\ldots\times G_\xi\times\ldots$$

Подгруппа A группы G называется *прямым сомножителем группы* G, если найдется такая подгруппа $B\subset G$, что $G=A\times B$. Группа называется *разложимой*, если найдется собственная подгруппа, являющаяся ее прямым сомножителем.

Два разложения данной группы G в прямые произведения называются *изоморфными*, если между множителями этих разложений можно установить взаимно однозначное соответствие так, что соответствующие множители являются изоморфными группами.

Пусть группа G есть прямое произведение своих подгрупп G_ξ $(\xi\in\Gamma)$, и пусть некоторые из подгрупп G_ξ $(\xi\in\Gamma';\ \Gamma'\subset\Gamma)$ раскладываются в прямое произведение своих подгрупп $G_\xi=\prod\limits_{\eta\in\Gamma_\xi} G_{\xi\eta}$.

Тогда группа G есть прямое произведение всех подгрупп $G_{\xi\eta}(\xi\in\Gamma';$

$\eta \in \Gamma_\xi$) и G_ξ ($\xi \in \Gamma$; $\xi \notin \Gamma'$) (см. 5.6.3). Разложение G в прямое произведение всех подгрупп $G_{\xi\eta}$ ($\xi \in \Gamma'$, $\eta \in \Gamma_\xi$) и G_ξ ($\xi \in \Gamma$; $\xi \notin \Gamma'$) называется *продолжением* разложения $G = \prod_{\xi \in \Gamma} G_\xi$.

5.6.1. Группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и определяющим множеством соотношений, состоящим из соотношений $a_1^7 = e$, $a_2^{13} = e$, $a_3^8 = e$, $a_4^5 = e$ и всех соотношений вида $a_i a_j = a_j a_i$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$). Разложить G в прямое произведение циклических подгрупп.

5.6.2. Пусть $G = A \times B$, где A имеет порождающее множество $\{a_1, a_2\}$, определяющее множество соотношений $a_1^8 = a_2$, и пусть $B = [b_1, b_2, b_3]$ и имеет определяющее множество соотношений $b_1^7 = b_2 b_3$. Доказать, что множество $M = \{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3\}$ является порождающим множеством группы G и что совокупность соотношений $a_1^8 = a_2$, $b_1^7 = b_2 b_3$, $a_2 b_3 = b_3 a_2$, $a_1 b_2 = b_2 a_1$, $b_2 a_2 = a_2 b_2$, $a_1 b_1 = b_1 a_1$, $a_1 b_3 = b_3 a_1$, $a_2 b_1 = b_1 a_2$ является определяющей совокупностью соотношений группы G относительно множества M.

5.6.3.Т. Пусть группа G есть прямое произведение своих подгрупп G_ξ ($\xi \in \Gamma$), и пусть некоторые из подгрупп G_ξ ($\xi \in \Gamma'$; $\Gamma' \subset \Gamma$) раскладываются в прямое произведение $G_\xi = \prod_{\eta \in \Gamma_\xi} G_{\xi\eta}$. Доказать, что группа G есть прямое произведение всех подгрупп $G_{\xi\eta}$ ($\xi \in \Gamma'$; $\eta \in \Gamma_\xi$) и G_ξ ($\xi \in \Gamma$; $\xi \notin \Gamma'$).

5.6.4. Доказать, что группа G не может одновременно раскладываться в прямое произведение циклических подгрупп и в свободное произведение циклических подгрупп.

Примечание. Доказано, что группа не может раскладываться одновременно в прямое и свободное произведение никаких своих собственных подгрупп.

5.6.5.У. Будут ли разложимы в прямое произведение своих подгрупп следующие группы:

1) конечная группа простого порядка;
2) циклическая группа бесконечного порядка;
3) группа кватернионов (см. 2.6.39);
4) конечная группа порядка 51;
5) аддитивная группа рациональных чисел.

5.6.6. Доказать, что мультипликативная группа всех отличных от нуля действительных чисел разложима в прямое произведение мультипликативной группы положительных чисел и циклической группы порядка 2.

5.6.7. Пусть G_1 и G_2 — конечные подгруппы группы G, имеющие взаимно простые порядки, и пусть каждый элемент из G_1 перестановочен с каждым элементом из G_2. Доказать, что $[G_1, G_2] = G_1 \times G_2$.

5.6.8. Пусть A — подгруппа симметрической группы S_8, порожденная подстановками $a = (1234)(5678)$, $b = (1537)(2846)$. Разложима ли A в прямое произведение?

5.6.9. Пусть H — подгруппа симметрической группы S_4, порожденная элементами $a = (12)(34)$, $b = (13)(24)$ и $c = (14)(23)$. Доказать, что H раскладывается в прямое произведение. Сколько существует неизоморфных разложений группы H в прямое произведение своих подгрупп?

5.6.10. Доказать, что:

1) если группа G раскладывается в прямое произведение абелевых подгрупп, то G — абелева группа;

2) если группа G раскладывается в прямое произведение полных подгрупп (см. 5.5.17), то G — полная группа;

3) если группа G раскладывается в прямое произведение периодических подгрупп, то G — периодическая группа (см. гл. II, § 6).

5.6.11. Доказать, что фактор-группа свободной группы по коммутанту есть или бесконечная циклическая группа, или прямое произведение бесконечных циклических групп.

5.6.12. Доказать, что группа G порядка pq, где p и q — различные простые числа, разложима в прямое произведение тогда и только тогда, когда G коммутативна.

5.6.13.Т. Пусть $G = \prod\limits_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$. Доказать, что каждый элемент $g \in G$ $(g \neq e)$ единственным образом с точностью до порядка сомножителей записывается в виде

$$g = a_1 a_2 \ldots a_n; \quad a_i \neq e; \quad a_i \in G_{\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

5.6.14.Т. Пусть G_α $(\alpha \in \Gamma)$ — совокупность подгрупп группы G, причем элементы любых двух подгрупп G_α и G_β $(\alpha \neq \beta)$ перестановочны между собой, и пусть каждый элемент $g \in G$ $(g \neq e)$ единственным образом с точностью до порядка сомножителей записывается в виде

$$g = a_1 a_2 \ldots a_n; \quad a_i \neq e; \quad a_i \in G_{\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-2, n-1$. Доказать, что G раскладывается в прямое произведение своих подгрупп G_α ($\alpha \in \Gamma$).

Примечание. Элемент g_α из подгруппы G_α, входящий в разложение (*) элемента g (см. 5.6.13), называется *компонентой* элемента g в прямом сомножителе G_α относительно данного разложения. Если в указанном разложении нет множителя, принадлежащего G_α, то компонентой элемента g в G_α считается единица. Если $G = G_1 \times \ldots \times G_n$, то всякий $g \in G$ может быть единственным образом представлен в виде $g = g_1 \ldots g_i \ldots g_n$, где g_i — компонента g в G_i. В этом случае наряду с разложением (*) рассматривают и указанное выше разложение, которое от разложения (*) может отличаться лишь присутствием дополнительных множителей, равных e.

5.6.15. Пусть D — аддитивная группа всех комплексных чисел. Существуют ли такие два прямых разложения

$$D = A \times B; \quad D = A \times C$$

и такой элемент $d \in D$, что компонента элемента d в прямом сомножителе A относительно первого разложения отлична от компоненты d в A относительно второго разложения?

5.6.16. Пусть группа G раскладывается в прямое произведение конечных подгрупп $G_1, G_2, \ldots, G_n$, имеющих соответственно порядки $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Доказать, что G — конечная группа. Найти порядок группы G.

5.6.17. Пусть $g \in G = \prod_{\xi \in \Gamma} G_\xi$; α — фиксированный элемент из Γ, и пусть g_α — компонента $g \in G$ в прямом сомножителе G_α. Доказать, что отображение $\varphi : \varphi(g) = g_\alpha$ есть гомоморфизм группы G на подгруппу G_α.

Примечание. Это означает, что компонента произведения равна произведению компонент.

5.6.18. Пусть группа G имеет только один нормальный делитель, отличный от самой группы и единичной подгруппы. Доказать, что G неразложима.

5.6.19. Доказать, что центр прямого произведения равен прямому произведению центров сомножителей.

5.6.20. Доказать, что коммутант прямого произведения равен прямому произведению коммутантов сомножителей.

5.6.21.Т. Если A — прямой множитель группы G, то всякий нормальный делитель A' подгруппы A будет нормальным делителем и в группе G. Доказать.

5.6.22. Пусть группа G разложима в прямые произведения

$$G = A \times B, \qquad G = A \times C.$$

Доказать, что подгруппа C изоморфна B.

5.6.23. Пусть $G = A \times B$ и подгруппа F содержит прямой множитель A. Доказать, что $F = A \times (F \cap B)$.

5.6.24. Пусть G — мультипликативная группа всех квадратных действительных матриц порядка n с положительным определителем. Обозначим через N_1 совокупность всех матриц из G с определителем, равным 1, и через N_2 — совокупность всех матриц вида λE_n, где λ — положительное число, E_n — единичная квадратная матрица порядка n. Доказать, что $G = N_1 \times N_2$.

5.6.25.Т. Доказать, что если все убывающие цепи нормальных делителей группы G конечны, то группа G не может быть разложена в прямое произведение бесконечного числа подгрупп.

5.6.26.Т.У. Пусть все убывающие цепи нормальных делителей группы G конечны. Доказать, что любое разложение группы G может быть продолжено до разложения, все множители которого неразложимы в прямое произведение подгрупп.

5.6.27. Пусть группа G разложима в прямое произведение подгрупп $G = G_1 \times G_2 \times \ldots$, порядки которых являются простыми числами. Выяснить, когда G обладает лишь единственным прямым разложением на неразложимые множители.

5.6.28.Т.У. Пусть в группе G все возрастающие цепи прямых сомножителей конечны. Доказать, что в G все убывающие цепи прямых сомножителей конечны.

5.6.29.Т.У. Пусть множество G есть декартово произведение (см. гл. I, § 1) групп $G_1, \ldots, G_n$. В множестве G определим умножение следующим образом: пусть

$$g_1 = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n), \qquad a_i \in G_i,$$

$$g_2 = (b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_n), \qquad b_i \in G_i;$$

тогда $g_1 \cdot g_2 = (a_1 b_1, \ldots, a_i b_i, \ldots, a_n b_n)$, где $a_i b_i$ — произведение элементов a_i и b_i в группе G_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Доказать, что относительно указанного выше действия множе-

ство G образует группу, которая раскладывается в прямое произведение подгрупп $\overline{G}_i$, изоморфных группам G_i соответственно.

5.6.30. Пусть группа G раскладывается в прямое произведение n бесконечных циклических групп. Обозначим через H подгруппу всех элементов из G, представимых в виде x^2 $(x \in G)$. Доказать, что G/H — подгруппа порядка 2^n, раскладывающаяся в прямое произведение n циклических подгрупп порядка 2.

5.6.31.Т.У. Пусть свободная группа G обладает свободным порождающим множеством из n элементов. Доказать, что всякое другое свободное порождающее множество группы G содержит n элементов.

Примечание. В задаче 5.6.31 доказана единственность ранга свободной группы для конечного случая. Отсюда непосредственно следует единственность ранга и в общем случае.

5.6.32.У. Пусть G — декартово произведение (гл. I, § 1) конечных групп $G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots$. В множестве G определим умножение следующим образом: пусть

$$g_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots), \quad g_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots);$$

тогда

$$g_1 \cdot g_2 = (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_ib_i, \ldots),$$

где a_ib_i — произведение элементов a_i и b_i в группе G_i. Доказать, что относительно указанного действия множество G образует группу. Может ли G быть разложена в прямое произведение подгрупп $\overline{G}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, изоморфных группам G_i.

Примечание. Результат сравнить с задачей 5.6.29.

5.6.33.Т. Доказать, что группа G тогда и только тогда раскладывается в прямое произведение своих подгрупп $G_\alpha, \ldots, G_\xi, \ldots$ $(\xi \in \Gamma)$, когда выполнены все три указанных ниже условия:

1) подгруппы $G_\alpha, \ldots, G_\xi, \ldots$ являются нормальными делителями G;

2) $G = [\bigcup_{\xi \in \Gamma} G_\xi]$;

3) пересечение каждой G_η $(\eta \in \Gamma)$ с подгруппой, порожденной остальными G_ξ $(\xi \neq \eta)$, есть единичная подгруппа.

ГЛАВА VI

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

§ 1. Простейшие свойства абелевых групп

Настоящая глава посвящена коммутативным (абелевым) группам. В дальнейшем на протяжении всей главы будут рассматриваться только абелевы группы, причем это обстоятельство иногда не будет специально оговариваться.

В случае, когда абелева группа G задана порождающим множеством M и определяющей совокупностью соотношений, будем предполагать, что в число соотношений включаются все соотношения вида $xy = yx$ $(x, y \in M)$.

Часто для абелевых групп употребляют аддитивную запись. В аддитивной записи вместо $x \cdot y$ пишут $x + y$, вместо x^n пишут nx и единицу группы обозначают через 0. В настоящей главе для абелевых групп мы сохраним нашу обычную мультипликативную запись.

Абелева группа называется *периодической группой*, если все ее элементы имеют конечный порядок (см. гл. II, § 6); *группой без кручения*, если все ее элементы, кроме единицы, имеют бесконечный порядок; *смешанной*, если группа содержит неединичные элементы конечного порядка и элементы бесконечного порядка.

Если порядки элементов периодической группы G суть степени одного и того же простого числа p, т. е. G является p-группой (см. гл. IV, § 4), то G называют *примарной группой* относительно простого числа p.

Совокупность F всех элементов конечного порядка группы G образует подгруппу, которую называют *максимальной периодической подгруппой* группы G или *периодической частью* группы G (см. 6.1.1). Совокупность всех элементов периодической группы G, порядки которых суть степени одного и того же простого числа p, образует подгруппу, которую называют *примарной компонентой относительно простого числа p* или *p-компонентой* группы G (см. 6.1.7).

Конечную совокупность элементов $g_1, g_2, \ldots, g_k$ группы G будем называть линейно зависимой, если существуют такие целые числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$, не все равные нулю, для которых имеет место равенство

$$g_1^{n_1} g_2^{n_2} \ldots g_k^{n_k} = e.$$

Совокупность элементов, не обладающих этим свойством, называется *линейно независимой*. В аддитивной записи указанное условие линейной зависимости будет иметь вид $n_1g_1 + n_2g_2 + \ldots + n_kg_k = 0$ и, следовательно, совпадает с обычным определением линейной зависимости.

Бесконечная совокупность элементов группы G называется *линейно независимой*, если все ее конечные подмножества линейно независимы. В противном случае совокупность называется *линейно зависимой*. Говорят, что элемент $g \in G$ *линейно зависит* от совокупности $E \subset G$, если существуют такое натуральное число m и такие элементы $g_1, g_2, \ldots, g_k \in E$, что $g^m \in [g_1, \ldots, g_k]$.

Пусть группа G обладает конечной максимальной линейно независимой совокупностью. Тогда все максимальные линейно независимые совокупности содержат одинаковое число элементов (см. 6.1.21). В этом случае число элементов в максимальной линейно независимой совокупности группы G называется *рангом* G. Если группа G не обладает максимальной линейно независимой совокупностью, содержащей конечное число элементов, то говорят, что группа G имеет *бесконечный ранг*. Считается, что периодические группы имеют нулевой ранг.

6.1.1.Т. Доказать, что периодическая часть группы G является вполне характеристической подгруппой G (см. гл. III, § 4).

6.1.2. Найти периодическую часть мультипликативной группы всех отличных от нуля комплексных чисел.

6.1.3. Пусть T — периодическая часть группы G и H — подгруппа G, тогда $H \cap T$ — периодическая часть группы H. Доказать.

6.1.4. Доказать, что аддитивная группа комплексных чисел есть прямое произведение двух аддитивных групп, изоморфных аддитивной группе вещественных чисел.

6.1.5. Доказать, что всякая совокупность элементов группы G, содержащая элемент конечного порядка, линейно зависима.

6.1.6. Доказать, что совокупность элементов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ группы G будет линейно зависима тогда и только тогда, когда один из элементов v_i линейно зависит от остальных элементов.

6.1.7 Доказать, что всякая примарная компонента группы G образует вполне характеристическую подгруппу G (см. гл. III, § 4).

6.1.8 Пусть T — примарная компонента группы G относительно простого числа p, и пусть H — подгруппа G. Доказать, что $H \cap T$ — примарная компонента группы H относительно простого числа p.

6.1.9.Т.У. Всякая периодическая группа может быть разложена в прямое произведение примарных групп, относящихся к различным простым числам. Доказать.

6.1.10.Т. Доказать, что периодическая группа может быть лишь единственным образом разложена в прямое произведение примарных подгрупп, относящихся к различным простым числам.

6.1.11. Доказать, что аддитивная группа всех рациональных чисел есть группа без кручения и, далее, что она может быть представлена в виде объединения возрастающей последовательности циклических подгрупп.

6.1.12. Изоморфны ли группы рациональных чисел по сложению и положительных рациональных чисел по умножению?

6.1.13. Пусть H и K — подгруппы G и $H \subset K$, причем индекс H в группе K конечен. Доказать, что индекс подгруппы $[H, a]$ в группе $[K, a]$ конечен и является делителем индекса H в группе K $(a \in G)$.

6.1.14. Пусть G — примарная группа относительно простого числа p и k — натуральное число такое, что $(k, p) = 1$. Всегда ли в группе G разрешимо уравнение $x^k = a$ $(a \in G)$? Сколько оно имеет решений?

6.1.15. Доказать, что совокупность всех n-х степеней элементов из группы G является вполне характеристической подгруппой (см. гл. III, § 4).

6.1.16. Найти все абелевы группы, которые не имеют собственных гомоморфизмов, т. е. гомоморфизмов, отличных от изоморфизма и гомоморфизма на единичную группу.

6.1.17. Пусть группа G раскладывается в прямое произведение циклических групп. Существует ли элемент $a \in G$, отличный от единицы, для которого уравнение $x^n = a$ разрешимо при любом натуральном n?

6.1.18. Доказать, что прямое произведение любого множества групп, примарных относительно одного и того же простого числа p, есть группа, примарная относительно p.

6.1.19. Пусть группа G раскладывается в прямое произведение конечных циклических групп порядка 5 и 3 и четырех бесконечных циклических групп.

Определить:

1) периодическую часть G;

2) число периодических подгрупп;

3) фактор-группу G по периодической части;

4) гомоморфный образ G при гомоморфизме φ, ядром которого является циклическая подгруппа порядка 5.

6.1.20. Доказать, что всякая конечно порожденная абелева группа G (см. гл. II, § 6), не являющаяся периодической, обладает конечной максимальной линейно независимой совокупностью.

6.1.21. Пусть A и B — две максимальные конечные линейно независимые совокупности группы G. Тогда A и B содержат одинаковое число элементов. Доказать.

6.1.22. Пусть G — абелева группа, T — ее периодическая часть. Доказать, что ранг G равен рангу G/T.

6.1.23. Доказать, что ранг абелевой группы G является ее инвариантом относительно изоморфизма (т. е. не изменяется при любых изоморфизмах группы G).

6.1.24.Т. Пусть G раскладывается в прямое произведение конечного числа циклических групп. Доказать, что число бесконечных циклических сомножителей не зависит от выбора разложения группы G.

6.1.25. Пусть G — абелева группа, примарная относительно простого числа p. Доказать, что совокупность всех элементов G, имеющих порядок, меньший или равный p, образует характеристическую подгруппу (см. гл. IV, § 8).

Примечание. Указанная в задаче подгруппа называется *нижним слоем* группы G.

6.1.26. Пусть абелева группа G, примарная относительно простого числа p, раскладывается в прямое произведение циклических групп. Для каждого натурального n обозначим через $A^{(n)}$ произведение всех прямых сомножителей, порядки которых равны p^n (если таковых нет, то положим $A^{(n)} = e$). Через $B^{(n)}$ обозначим прямое произведение нижних слоев $A_1^{(n)}$, $A_1^{(n+1)}$, ... групп $A^{(n)}$, $A^{(n+1)}$, ... соответственно. Доказать, что:

1) $A_1^{(n)}$ изоморфна $B^{(n)}/B^{(n+1)}$;

2) $B^{(n)}$ содержит те и только те элементы a из нижнего слоя, для которых уравнение $x^{p^{n-1}} = a$ разрешимо;

3) подгруппы $A_1^{(n)}$ и $B^{(n)}$ не зависят от разложения G в прямое произведение.

6.1.27.Т.У. Пусть G — примарная группа, разложимая в прямое произведение циклических. Доказать, что любые

два разложения G в прямое произведение циклических групп изоморфны.

6.1.28.Т.У. Пусть G — конечная или счетная группа, разложимая в прямое произведение циклических групп. Тогда любые два разложения G с циклическими сомножителями, бесконечными или примарными конечными, изоморфны. Доказать.

Примечание. Предположение счетности на самом деле может быть отброшено.

§ 2. Конечные абелевы группы

Пусть G — конечная абелева группа. Как мы увидим, G раскладывается в прямое произведение циклических примарных подгрупп, при этом всякие два разложения группы G в прямое произведение примарных циклических групп изоморфны (см. 6.2.7 и 6.2.9). Пусть в разложении группы G в прямое произведение примарных циклических групп входят примарные группы, относящиеся к простым числам $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Пусть число примарных сомножителей, относящихся к простому числу p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, равно l_i, и пусть порядки сомножителей равны

$$p_i^{\alpha_{i1}}, p_i^{\alpha_{i2}}, \ldots, p_i^{\alpha_{il_i}},$$

где $\alpha_{i1} \geqslant \alpha_{i2} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{il_i}$. Числа $p_i^{\alpha_{in_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots, k;\ n_i = 1, 2, \ldots \ldots, l_i)$ называются *инвариантами* группы G. Задание всех инвариантов G определяет группу G с точностью до изоморфизма. Конечные группы, имеющие разные инварианты, неизоморфны (см. 6.2.8 и 6.2.9). Набор всех инвариантов конечной группы G иногда будем выписывать в виде таблицы, у которой в каждой строке в порядке убывания стоят инварианты, относящиеся к одному простому числу. В некоторых случаях будем дополнять строчки символом $p_i^0 = 1$. Например, если конечная группа раскладывается в прямое произведение четырех циклических групп, имеющих порядки 2^2, 2^2, 2^5, 2^6, и трех циклических групп с порядками 3, 3^3, 3^4, то инварианты можно записывать в виде следующей таблицы:

$$2^6,\ 2^5,\ 2^2,\ 2^2;$$
$$3^4,\ 3^3,\ 3,\ \ 3^0.$$

Следует обратить внимание на то, что в наборе инвариантов одно и то же число может встречаться несколько раз, т. е. набор инвариантов представляет собой не множество, а семейство (см. гл. I, § 1).

6.2.1. Пусть H — подгруппа конечной абелевой группы G; пусть индекс H в группе G равен k и пусть H' — подгруппа

G порядка p^l, где p — простое число и $(k, p) = 1$. Доказать, что $H' \subset H$.

6.2.2. Найти все примарные компоненты конечных групп порядков 1) 21; 2) 30; 3) 462; 4) 101.

6.2.3. Для конечной группы порядка 35 определить:

1) число подгрупп;

2) число собственных подгрупп;

3) число собственных характеристических подгрупп (гл. IV, § 8);

4) число собственных вполне характеристических подгрупп (гл. III, § 4).

6.2.4. Найти разложение группы порядка 30030 в прямое произведение циклических групп.

6.2.5. Пусть G — конечная абелева группа, примарная относительно простого числа p; пусть a — элемент максимального порядка p^k. Обозначим через H максимальную подгруппу G, для которой $H \cap [a] = e$. Пусть $x \notin [H, a]$, но $x^p \in [H, a]$. Доказать, что найдется целое число k такое, что $x^p a^{pk} \in H$.

6.2.6.У. Если в конечной абелевой группе, примарной относительно простого числа p, элемент a есть элемент максимального порядка p^k, то подгруппа $[a]$ есть прямой сомножитель. Доказать.

6.2.7.Т.У. Доказать, что всякая конечная абелева группа разлагается в прямое произведение примарных циклических групп.

6.2.8.Т. Если конечные группы имеют одинаковые наборы инвариантов, то они изоморфны. Доказать.

6.2.9.Т.У. Доказать, что конечные группы, имеющие разные наборы инвариантов, неизоморфны.

6.2.10. Для следующих конечных групп, заданных порождающим множеством и определяющей совокупностью соотношений, найти их инварианты:

1) $\{a_1, a_2\}$, $a_1^5 = e$, $a_2^7 = e$;

2) $\{a_1, a_2\}$, $a_2^4 = a_1$, $a_1^2 = e$;

3) $\{a_1, a_2, a_3\}$, $a_1^3 = e$, $a_1 a_2 = e$, $a_3^2 = e$;

4) $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $a_1^3 = e$, $a_2^4 = e$, $a_3^5 = e$, $a_1 a_2 = a_3 a_4$;

5) $\{a_1, a_2, a_3\}$, $a_1^8 = e$, $a_2^2 = e$, $a_3^2 = e$.

6.2.11. Пусть p — простое число. Когда конечная группа G имеет собственные гомоморфизмы (см. 6.1.16) только на группы, примарные относительно простого числа p?

6.2.12.Т. Пусть конечная примарная относительно простого числа p абелева группа G имеет инварианты $p^{k_1}, p^{k_2}, \ldots, p^{k_s}$ и H — подгруппа G. Доказать, что если H имеет инварианты $p^{l_1}, p^{l_2}, \ldots, p^{l_s}$, то $k_i \geqslant l_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

6.2.13.Т.У. Пусть конечная абелева группа G имеет инварианты

$$\begin{array}{l} p_1^{\alpha_{11}}, \ldots, p_1^{\alpha_{1m}}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_i^{\alpha_{i1}}, \ldots, p_i^{\alpha_{im}}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_k^{\alpha_{k1}}, \ldots, p_k^{\alpha_{km}} \end{array}$$

и пусть H — подгруппа G, имеющая инварианты

$$\begin{array}{l} p_1^{\beta_{11}}, \ldots, p_1^{\beta_{1m}}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_i^{\beta_{i1}}, \ldots, p_i^{\beta_{im}}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_k^{\beta_{k1}}, \ldots, p_k^{\beta_{km}}. \end{array}$$

Доказать, что для каждых $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, m$

$$\beta_{ij} \leqslant \alpha_{ij}.$$

6.2.14. Найти инварианты конечной абелевой группы G, у которой каждая собственная подгруппа характеристическая.

6.2.15. Найти инварианты конечной абелевой группы G, у которой каждая подгруппа вполне характеристическая.

6.2.16. Найти все конечные абелевы группы, которые имеют собственные гомоморфизмы (см. 6.1.16) только на циклические группы.

6.2.17. Какие конечные группы не имеют собственных эндоморфизмов, т. е. эндоморфизмов, отличных от автоморфизма и единичного гомоморфизма?

6.2.18. Существуют ли в конечной группе G элементы a, отличные от единицы, для которых уравнение $x^n = a$ разрешимо для каждого натурального n?

6.2.19. Примарная группа задана инвариантами p^4, p^3, p^2. Сколько элементов порядка p она содержит?

6.2.20. Конечная группа G задана своими инвариантами: 2^3, 2; 5^2, 5, 5.

Определить:

1) порядок G;

2) существуют ли в G подгруппы порядков 31, 25, 10, 40, 27, 120;

3) инварианты подгрупп двадцатого порядка.

6.2.21. Конечная группа G задана своими инвариантами:

$$5^3,\ 5^2,\ 5;\ 7;\ 3,$$

а группа G' — своими инвариантами:

$$2^3,\ 2^2,\ 2;\ 11.$$

Существует ли неединичный гомоморфизм G в группу G'?

6.2.22. Конечная группа G задана своими инвариантами 3; 7. Сколько нетождественных автоморфизмов существует у этой группы?

6.2.23. Доказать, что если подмножество S конечной абелевой группы G содержит все элементы максимальных порядков, то $[S] = G$.

§ 3. Конечно порожденные абелевы группы

Произвольная конечно порожденная абелева группа раскладывается в прямое произведение примарных конечных и бесконечных циклических групп, причем число бесконечных циклических сомножителей конечно и равно рангу группы (см. 6.3.4 и 6.3.19). Конечно порожденная группа G имеет конечную периодическую часть и вполне определяется набором инвариантов периодической части и своим рангом (см. 6.3.5 и 6.3.6). Набор инвариантов периодической части и ранг составляют полную систему инвариантов конечно порожденной группы в том смысле, что их задание определяет группу с точностью до изоморфизма.

6.3.1.Т.У. Доказать, что в конечно порожденной группе G не существует бесконечного числа различных подгрупп H_i $(i = 1, 2, \ldots)$ таких, что

$$H_1 \subset H_2 \subset \ldots H_i \subset \ldots$$

6.3.2.У. Пусть дана абелева группа $A = [a_1, \ldots, a_k]$, и пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — произвольные целые числа, наиболь-

ший общий делитель которых равен единице. Обозначим через b_1 произведение $a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{n_k}$. Доказать, что найдутся такие $b_2, b_3, \ldots, b_k$, что $A = [b_1, \ldots, b_k]$.

6.3.3. Доказать, что периодическая часть конечно порожденной абелевой группы есть конечная группа.

6.3.4.Т.У. Доказать, что конечно порожденная абелева группа G представляет собой прямое произведение конечного числа циклических групп, бесконечных или конечных примарных.

6.3.5.Т. Доказать, что если конечно порожденные абелевы группы имеют одинаковые ранги и одинаковые наборы инвариантов периодических частей, то они изоморфны.

6.3.6.Т. Если конечно порожденные абелевы группы G и G' имеют или разные ранги, или разные наборы инвариантов периодических частей, то G и G' неизоморфны. Доказать.

Примечание. Сравнить результат этой задачи с результатами задач 6.3.4 и 6.3.5.

6.3.7.Т.У. Пусть конечно порожденная группа G имеет ранг r_1 и набор инвариантов периодической части

$$\begin{array}{c} p_1^{\alpha_{11}}, \ldots, p_1^{\alpha_{1m}}; \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ p_i^{\alpha_{i1}}, \ldots, p_i^{\alpha_{im}}; \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ p_k^{\alpha_{k1}}, \ldots, p_k^{\alpha_{km}} \end{array}$$

и пусть H — подгруппа G, имеющая ранг r_2 и набор инвариантов периодической части

$$\begin{array}{c} p_1^{\beta_{11}}, \ldots, p_1^{\beta_{1m}}; \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ p_i^{\beta_{i1}}, \ldots, p_i^{\beta_{im}}; \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ p_k^{\beta_{k1}}, \ldots, p_k^{\beta_{km}}. \end{array}$$

Доказать, что $r_1 \geqslant r_2$ и для каждых $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, m$

$$\alpha_{ij} \geqslant \beta_{ij}.$$

6.3.8.У. Группы заданы порождающим множеством и определяющей совокупностью соотношений. Найти ранг и набор

инвариантов:

1) $A = [a_1, a_2]$, $a_1^3 = e$;

2) $A = [a_1, a_2]$, $a_1^2 = a_3$;

3) $A = [a_1, a_2, a_3]$, $a_1^5 = e$, $a_2 = a_3^3$;

4) $A = [a_1, a_2]$, $a_1^3 a_2^2 = e$, $a_1^7 a_2 = e$;

5) $A = [a_1, a_2, a_3]$, $a_1^3 a_2^2 a_3 = e$, $a_1 a_2 a_3^3 = e$;

6) $A = [a_1, a_2, a_3]$, $a_1^3 a_2^6 a_3^6 = e$, $a_1^6 a_2^{13} a_3^5 = e$;

7) $A = [a_1, a_2, a_3]$, $a_1^2 a_2^3 = e$;

8) $A = [a_1, a_2, a_3]$, $a_1^3 a_2^9 a_3^9 = e$, $a_1^9 a_2^{-3} a_3^9 = e$;

9) $A = [a_1, a_2, a_3]$, $a_1^2 a_2^3 a_3^{-2} = e$, $a_1^6 a_2^{-2} a_3^{-3} = e$.

Примечание. Из задачи видно, что изоморфные группы могут иметь разные порождающие множества и определяющие соотношения.

6.3.9. Пусть дана группа G с порождающими a_1, a_2, a_3, заданная соотношением $a_1^{10} = e$. Найти:

1) ранг G;

2) периодическую часть G;

3) фактор-группу по периодической части;

4) число периодических подгрупп;

5) все примарные компоненты периодической части.

6.3.10. Дана конечно порожденная группа G ранга 1 с набором инвариантов периодической части 5^2, 5; 3. Определить:

1) существует ли гомоморфизм G на циклическую группу порядка 25;

2) существует ли гомоморфизм G на конечную группу G', заданную инвариантами 3; 5;

3) существует ли гомоморфизм G на группу без кручения, являющуюся прямым произведением трех бесконечных циклических групп;

4) существует ли неединичный гомоморфизм G в конечную группу G', заданную инвариантами 2^3, 2, 2; 7^2, 7, 7^0; 11, 11, 11.

6.3.11. Группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3\}$ и определяющим соотношением $a_1 = a_2^2$. Существуют ли в G неединичные элементы конечного порядка?

6.3.12. Группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3\}$ и соотношениями $a_1^3 = e$, $a_2^5 = e$. Найти инварианты подгруппы, порожденной элементами a_2^2 и a_1.

6.3.13. Конечно порожденная группа G имеет ранг 2 и набор инвариантов 2^3, 7. Доказать, что существуют такие $a_1, a_2, a_3, a_4 \in G$, что $G = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ и совокупность соотношений $a_1^7 = e$, $a_2^8 = e$ является определяющей относительно порождающего множества $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

6.3.14. Конечно порожденная группа G имеет ранг 3 и набор инвариантов периодической части 5^2, 5^2; 7^3. Определить:

1) число периодических неединичных характеристических подгрупп;

2) число вполне характеристических периодических неединичных подгрупп;

3) существуют ли вполне характеристические подгруппы G, являющиеся группами без кручения.

6.3.15. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2\}$ и определяющей совокупностью соотношений $a_1^5 = e$. Сколько автоморфизмов существует у группы G?

6.3.16. Группа задана порождающим множеством $\{a_1, a_2\}$ и определяющими соотношениями $a_1^2 a_2^5 = e$, $a_1^5 a_2^{-3} = e$. Какой порядок имеет подгруппа, порожденная элементом $a_1^2 a_2$?

6.3.17. Пусть конечно порожденная группа G имеет ранг 5 и набор инвариантов 3^2, 3; 5^3, 5. Определить:

1) существуют ли в G собственные подгруппы, изоморфные G;

2) существует ли эндоморфизм G на себя, не являющийся автоморфизмом.

6.3.18. Доказать, что множество всех неизоморфных конечно порожденных абелевых групп счетно.

§ 4. Бесконечные абелевы группы

Абелева группа G называется *полной*, если для всякого элемента $a \in G$ и всякого натурального числа n уравнение $x^n = a$ имеет в G хотя бы одно решение (см. 5.5.17). Класс полных абелевых групп полностью описан. Важность этого класса объясняется тем, что произвольная абелева группа изоморфна некоторой подгруппе полной группы (см. 6.4.25).

Подгруппа C группы G называется *сервантной*, если для любого элемента $c \in C$ и любого натурального числа n из разрешимости в группе G уравнения $x^n = c$ следует его разрешимость уже в подгруппе C.

Пусть a — элемент группы G, примарной относительно простого числа p. Натуральное число k называется *высотой* элемента a в группе G, если уравнение $x^{p^k} = a$ разрешимо в G, а уравнение $x^{p^{k+1}} = a$ уже не разрешимо в G. Если уравнение $x^{p^k} = a$

разрешимо в G для каждого натурального k, то говорят, что a имеет *бесконечную высоту* в G. Пусть $a \in G$ — элемент бесконечного порядка, и пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность всех простых чисел, перенумерованных в порядке возрастания. Поставим в соответствие элементу a символ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, в котором $\alpha_n = 0$, если уравнение $x^{p_n} = a$ не имеет решения в G; $\alpha_n = k$, если в G может быть решено уравнение $x^{p_n^k} = a$, но уравнение $x^{p_n^{k+1}} = a$ не разрешимо в G; $\alpha_n = \infty$, если все уравнения $x^{p_n^i} = a$ разрешимы в G $(i = 1, 2, \ldots)$. Символ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ называется *характеристикой* элемента a.

Характеристика $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ называется *эквивалентной* характеристике $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots)$, если $\alpha_n = \beta_n$ для всех n, кроме, может быть, конечного числа, притом таких, что и α_n и β_n отличны от ∞. Все характеристики распадаются на непересекающиеся классы эквивалентных характеристик (см. 6.4.29). Эти классы называются *типами*. Говорят, что тип α' не превосходит β' $(\alpha' \leqslant \beta')$, если существует характеристика α типа α' и характеристика β типа β' такие, что $\alpha_n \leqslant \beta_n$ для всех n. При этом ∞ считается больше любого числа.

6.4.1. Доказать, что если в непериодической группе G все элементы бесконечного порядка вместе с единицей образуют подгруппу, то G — группа без кручения.

6.4.2.Т. Доказать, что фактор-группа абелевой группы по периодической части есть группа без кручения.

6.4.3. Пусть группа G содержит элементы порядков $p_1, p_2, \ldots, p_n$, где p_i $(i = 1, \ldots, n)$ — взаимно простые числа. Доказать, что G содержит элемент порядка $p_1 p_2 \ldots p_n$.

6.4.4.Т.У. Всякая подгруппа A и фактор-группа G/A группы G конечного ранга сами имеют конечный ранг, причем сумма рангов A и G/A равна рангу G. Доказать.

6.4.5. Доказать, что ранг прямого произведения конечного числа групп конечного ранга равен сумме рангов сомножителей.

6.4.6. Пусть p — простое число, и пусть G' — аддитивная группа всех рациональных чисел, у которых знаменатели суть степени числа p. Обозначим через G'' подгруппу G', состоящую из всех целых чисел. Доказать, что группа $G = G'/G''$ есть бесконечная периодическая группа.

Примечание. Группу G называют обычно группой типа p^∞.

6.4.7. Доказать, что группа типа p^∞ может быть задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ и определяю-

щей совокупностью соотношений $a_1^p = e$, $a_{n+1}^p = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

6.4.8. Имеет ли группа типа p^∞ бесконечные собственные подгруппы?

6.4.9. Имеет ли группа G типа p^∞ собственные гомоморфизмы (см. 6.1.16) на группы, не изоморфные G?

6.4.10. Существует ли смешанная группа G, у которой все неединичные гомоморфные образы изоморфны G?

6.4.11. Будут ли полными группами следующие группы:

1) группа типа p^∞; 2) аддитивная группа рациональных чисел; 3) мультипликативная группа отличных от нуля комплексных чисел; 4) мультипликативная группа всех корней всех степеней из 1; 5) прямое произведение циклических групп?

6.4.12. Доказать, что если для всех простых чисел p совокупность p-х степеней всех элементов из группы G совпадает с G, то G является полной группой.

6.4.13. Пусть в группе G, примарной относительно простого числа p, каждый элемент порядка p имеет в G бесконечную высоту. Доказать, что G — полная группа.

6.4.14. Может ли полная группа иметь неединичные гомоморфизмы на конечные группы?

6.4.15. Доказать, что в группе A без кручения уравнение $x^n = a\ (a \in A)$ не может иметь более одного решения.

6.4.16. Всегда ли являются сервантными подгруппами G следующие подгруппы:

1) сама группа G;

2) периодическая часть G;

3) прямой сомножитель G.

6.4.17.Т. Доказать, что подгруппа C примарной относительно простого числа p группы G тогда и только тогда сервантна в G, когда каждый элемент из C имеет в C такую же высоту, как и во всей группе G.

6.4.18. Доказать, что полная группа C является сервантной в любой группе G, содержащей C в качестве подгруппы.

6.4.19. Доказать, что неединичная сервантная подгруппа полной группы не может быть конечной группой.

6.4.20.У. Доказать, что пересечение любого множества сервантных подгрупп группы без кручения является сервантной подгруппой.

6.4.21.Т.У. Пусть C — пересечение всех сервантных подгрупп группы G, содержащих множество $M \subset G$. Доказать,

что C состоит из всех элементов, линейно зависящих от элементов из M.

6.4.22. Доказать, что подгруппа C группы без кручения G сервантна тогда и только тогда, когда G/C является группой без кручения.

6.4.23. Доказать, что бесконечная циклическая группа изоморфна подгруппе некоторой полной группы.

6.4.24.Т. Доказать, что произвольная группа изоморфна фактор-группе прямого произведения бесконечных циклических групп.

6.4.25.Т.У. Доказать, что произвольная группа изоморфна подгруппе некоторой полной группы.

6.4.26.У. Доказать, что произвольная группа без кручения ранга 1 изоморфна подгруппе группы всех рациональных чисел по сложению.

6.4.27. Пусть m — целое число, отличное от нуля. Найти характеристику m: 1) в группе всех рациональных чисел по сложению; 2) в группе всех целых чисел по сложению; 3) в группе по сложению всех дробей, знаменатели которых равны степеням числа два.

6.4.28. Доказать, что отношение, введенное в множестве характеристик во введении к настоящему параграфу, удовлетворяет определению эквивалентности, данному в § 3 гл. I.

6.4.29. Доказать, что отношение $\leqslant$, введенное в множестве типов, есть отношение упорядоченности.

6.4.30. Доказать, что в группе без кручения ранга 1 характеристики всех неединичных элементов эквивалентны между собой.

Примечание. Класс, к которому принадлежат все элементы группы без кручения ранга 1, называется *типом* группы.

6.4.31.Т. Пусть G_1 и G_2 — группы без кручения ранга 1. Для того чтобы G_1 была изоморфна некоторой подгруппе группы G_2, необходимо и достаточно, чтобы тип G_1 был меньше или равен типу группы G_2. Доказать.

6.4.32.Т. Пусть G_1 и G_2 — группы без кручения ранга 1. Для того чтобы группа G_1 была изоморфна группе G_2, необходимо и достаточно, чтобы тип группы G_1 был равен типу группы G_2. Доказать.

ГЛАВА VII

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

§ 1. Представления общего типа

Пусть П — некоторый класс мультипликативных множеств (см. § 3 гл. II). Всякий гомоморфизм φ мультипликативного множества A в некоторое мультипликативное множество, принадлежащее классу П, называется *представлением* A в классе П, а множество $\varphi(A)$ — образом представления. Если класс П состоит из одного мультипликативного множества A, то говорят о представлении в этом множестве A вместо того, чтобы сказать «представление в классе, состоящем из одного мультипликативного множества A». Если этот гомоморфизм является изоморфизмом, то говорят об *изоморфном* или *точном* представлении. Представление в классе полугрупп преобразований называют представлением преобразованиями (подстановками).

Пусть φ_1 — представление мультипликативного множества M преобразованиями множества Ω_1 и φ_2 — представление множества M преобразованиями множества Ω_2. Говорят, что представление φ_2 несущественно отличается от представления φ_1 (или что φ_1 и φ_2 подобны), если существует такое взаимно однозначное отображение ψ множества Ω_1 на Ω_2, что для всяких $a \in M$ и $\alpha \in \Omega_1$ имеет место $\psi(\varphi_1(a)(\alpha)) = \varphi_2(a)(\psi\alpha)$. Очевидно, это означает, что представления φ_1 и φ_2 могут отличаться лишь внутренней природой элементов множеств Ω_1 и Ω_2.

Каждому элементу u мультипликативного множества M можно сопоставить преобразование $\bar{u}$ множества M, согласно которому $\bar{u}(x) = ux (x \in M)$ (элементы u и x перемножаются согласно действию в M). Такое преобразование u называется *левым сдвигом* множества M, соответствующим элементу u.

Совокупность представлений $\Phi = \{\varphi\}$ мультипликативного множества A в классе П называют *полной системой представлений*, если для всяких двух различных элементов $x, y \in A$ всегда найдется такое представление $\varphi \in \Phi$, что $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

7.1.1. Мультипликативное множество $\Omega = \{z_1, z_2, z_3\}$ задано таблицей Кэли:

	z_1	z_2	z_3
z_1	z_1	z_2	z_1
z_2	z_3	z_1	z_3
z_3	z_3	z_3	z_1

Описать все представления Ω в классе Π мультипликативных множеств, состоящем из одного мультипликативного множества $\Omega_1 = \{u_1, u_2\}$:

	u_1	u_2
u_1	u_1	u_1
u_2	u_1	u_2

7.1.2. Пусть A — мультипликативная полугруппа натуральных чисел, и пусть задано отображение φ полугруппы A в полугруппу всех преобразований множества $\Omega = \{a, b, c\}$, при котором

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Является ли φ представлением полугруппы A преобразованиями?

7.1.3. Пусть полугруппа A задана порождающим множеством $\{a_1, a_2\}$ (в смысле теории полугрупп) и определяющим множеством соотношений $a_1a_2 = a_2a_1$, $a_1^3 = a_2^2$. Рассмотрим отображение φ порождающего множества полугруппы A в полугруппу всех преобразований множества $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

$$\varphi(a_1) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}; \quad \varphi(a_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Можно ли продолжить отображение φ до представления полугруппы A преобразованиями множества Ω (см. гл. I, § 2)?

7.1.4.Т. Пусть представление φ_2 мультипликативного множества M несущественно отличается от представления φ_1. Доказать, что φ_1 будет несущественно отличаться от φ_2.

7.1.5. Пусть φ_1 и φ_2 — два представления мультипликативного множества M, несущественно отличающиеся друг от друга. Доказать, что если одно из них является изоморфным, то и другое будет изоморфным.

7.1.6. Пусть множества Ω_1 и Ω_2 равномощны и φ_1 — представление мультипликативного множества M преобразованиями Ω_1. Доказать, что существует представление φ_2 мультипликативного множества M преобразованиями множества Ω_2, которое несущественно отличается от представления φ_1.

7.1.7. Пусть φ_1 и φ_2 — два представления мультипликативного множества M, несущественно отличающиеся друг от друга. Доказать, что образы этих представлений изоморфны.

7.1.8. В множестве $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ определено умножение, согласно которому $a_i a_j = a_5$ ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$). Найти все представления M преобразованиями множества $\{1, 2\}$. Выяснить, какие из них несущественно отличаются друг от друга. Есть ли среди этих представлений изоморфные?

7.1.9. Пусть каждому элементу u мультипликативного множества M сопоставлен левый сдвиг $\bar{u}$ множества M, соответствующий элементу u. Если это отображение M в T_M (множество всех преобразований M) является представлением M преобразованиями, то умножение в M ассоциативно, т. е. M является полугруппой. Доказать.

7.1.10. Пусть каждому элементу u полугруппы M сопоставлен левый сдвиг $\bar{u}$. Доказать, что такое отображение M в T_M (см. 7.1.9) является представлением M преобразованиями.

Примечание. Результат сопоставить с 7.1.9. Описанное представление полугруппы будем называть в дальнейшем *представлением левыми сдвигами*.

7.1.11. Найти представления левыми сдвигами следующих полугрупп:

1) моногенной полугруппы типа (3, 5);

2) полугруппы A_1, заданной порождающим множеством $\{a_1, a_2\}$ и определяющим множеством соотношений

$$a_2 a_1 = a_1 a_2 = a_2, \quad a_1^2 = a_1, \quad a_2^2 = a_2;$$

3) полугруппы $A_2 = \{a_1, a_2, a_3\}$, заданной таблицей Кэли:

	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_1	a_1
a_2	a_1	a_2	a_2
a_3	a_1	a_2	a_3

Для каких из указанных выше полугрупп представления левыми сдвигами являются изоморфными представлениями?

7.1.12. Пусть полугруппа A обладает единицей. Доказать, что представление A левыми сдвигами является изоморфным представлением.

7.1.13.Т. Пусть представление полугруппы A левыми сдвигами является изоморфным представлением, и пусть $a_1, a_2 \in A$. Доказать, что если $a_1x = a_2x$ для всех $x \in A$, то $a_1 = a_2$.

7.1.14.Т. Пусть в полугруппе A не существует элементов $a_1 \neq a_2$ таких, что $a_1x = a_2x$ для всех $x \in A$. Доказать, что представление полугруппы A левыми сдвигами является изоморфным представлением.

Примечание. В задачах 7.1.13 и 7.1.14 получено необходимое и достаточное условие того, чтобы представление полугруппы левыми сдвигами было изоморфным представлением.

7.1.15. В множестве M определено действие, согласно которому $xy = x$ для всех $x, y \in M$. Найти представление M левыми сдвигами.

7.1.16. В множестве M определено действие, согласно которому $xy = y$ для всяких $x, y \in M$. Найти представление M левыми сдвигами.

7.1.17. Пусть П — класс полугрупп, каждая из которых состоит только из взаимно однозначных преобразований, и пусть полугруппа S с единицей имеет изоморфное представление в классе П. Тогда действие в полугруппе S обладает свойством *сократимости слева* и S не имеет отличных от единицы идемпотентов. Доказать.

Примечание. Полугруппу, у которой действие обладает свойством сократимости слева, называют *полугруппой с левым сокращением*. Аналогично определяются полугруппа с правым сокращением и полугруппа с двусторонним сокращением.

7.1.18.Т.У. Каждая полугруппа A имеет изоморфное представление преобразованиями. Доказать.

Примечание. Таким образом, доказано, что с точностью до изоморфизма все полугруппы исчерпываются полугруппами преобразований.

7.1.19.Т. Пусть в полугруппе A для каждого элемента $a \in A$ существует $z_a \in A$ такой, что $az_a = z_a$, и пусть φ — произвольное изоморфное представление A преобразованиями. Тогда каждое преобразование $\varphi(a) \in \varphi(A)$ имеет неподвижную точку. Доказать.

7.1.20.Т.У. Пусть полугруппа A такова, что при любом изоморфном представлении полугруппы A преобразованиями каждое преобразование из образа представления имеет неподвижную точку. Доказать, что для каждого элемента $a \in A$ существует элемент $z_a \in A$ такой, что $az_a = z_a$.

Примечание. В задачах 7.1.19 и 7.1.20 получено необходимое и достаточное условие того, чтобы при любом изоморфном представлении полугруппы A преобразованиями каждое преобразование имело неподвижную точку.

7.1.21. Пусть A — мультипликативная полугруппа рациональных чисел. Имеет ли A полную систему представлений в классе Π, состоящем из всех групп?

7.1.22. Существует ли полная система представлений моногенной полугруппы типа (5, 7) в классе всех регулярных коммутативных полугрупп (см. гл. II, § 5).

7.1.23. Описать все моногенные полугруппы, которые имеют полную систему представлений в классе всех групп.

7.1.24. Пусть $C = \{0, 1\}$ — мультипликативная полугруппа (с обычным правилом умножения чисел). Описать все конечные моногенные полугруппы, которые имеют полную систему представлений в полугруппе C.

7.1.25. Описать все полугруппы, которые имеют полную систему представлений в классе всех коммутативных полугрупп.

7.1.26. Пусть Π_1 — класс всех полугрупп с левым сокращением, Π_2 — класс всех полугрупп с правым сокращением, Π_3 — класс полугрупп с двусторонним сокращением. Описать все полугруппы, которые имеют полную систему представлений: 1) в Π_1; 2) в Π_2; 3) в Π_3.

7.1.27. Пусть Π — класс всех регулярных коммутативных полугрупп (см. гл. II, § 5). Доказать, что периодическая по-

лугруппа A, имеющая полную систему представлений в классе П, регулярна.

7.1.28.У. Пусть все элементы коммутативной полугруппы A — идемпотенты. Доказать, что полугруппа A имеет полную систему представлений в полугруппе C из задачи 7.1.24.

7.1.29.У. Описать все полугруппы, которые имеют полную систему представлений в классе всех коммутативных полугрупп, все элементы которых идемпотентны.

§ 2. Представления групп преобразованиями

Понятия и терминологию, введенную в предыдущем параграфе для произвольных мультипликативных множеств, мы будем в этом параграфе применять для групп, причем здесь мы будем рассматривать только представления групп обратимыми преобразованиями, называя их просто представлениями преобразованиями.

Если образ некоторого представления φ группы G является транзитивной группой (см. гл. IV, § 9), то представление будем называть *транзитивным*.

Роль транзитивных представлений заключается в том, что каждое представление группы можно в некотором смысле описать при помощи транзитивных представлений этой группы (см. 4.9.29, 7.2.32).

Пусть H — подгруппа группы G. Множество Ω есть множество правых смежных классов группы G по подгруппе H. Для каждого $g \in G$ рассмотрим преобразование u_g^H множества Ω, согласно которому $u_g^H(xH) = gxH$.

Отображение φ_H группы G в полугруппу преобразований T_Ω, определенное равенством

$$\varphi_H(g) = u_g^H,$$

является представлением группы G преобразованиями (см. 7.2.1 и 7.2.2). Представление φ_H будем называть *представлением группы G по подгруппе H*.

Роль представлений φ_H заключается в том, что каждое транзитивное представление любой группы несущественно отличается от некоторого представления этой группы по ее подгруппе (см. 7.2.22).

Среди представлений группы выделяются представления левыми сдвигами (см. 7.1.10).

Представление любой группы левыми сдвигами является изоморфным представлением (см. 7.2.7). Отсюда получаем, что каждая группа изоморфна некоторой группе преобразований.

Иными словами, с точностью до изоморфизма все группы исчерпываются группами преобразований.

7.2.1. Пусть H — подгруппа группы G, Ω — множество правых смежных классов группы G по подгруппе H.

Доказать, что преобразование u_g^H множества Ω, определенное равенством $u_g^H(xH) = gxH$, обратимо.

7.2.2.Т.У. Пусть H — подгруппа группы G, Ω — множество правых смежных классов группы G по подгруппе H. Доказать, что φ_H является представлением группы G преобразованиями множества Ω.

7.2.3. Доказать, что образ представления группы кватернионов (см. 2.6.39) по подгруппе $H = \{1, -1\}$ есть прямое произведение двух циклических групп второго порядка.

7.2.4. Пусть G — группа из задачи 5.4.18, $H = \{e, (ab)^2\}$. Найти образы элементов a, b при представлении φ_H. Является ли это представление изоморфным?

Примечание. Так как $G = [a, b]$, то, зная образы элементов a, b при некотором представлении, легко найти само представление.

7.2.5. Пусть G — группа. Доказать, что образ представления группы G левыми сдвигами состоит из обратимых преобразований.

7.2.6. Найти представления левыми сдвигами следующих групп:

1) группы кватернионов (см. 2.6.39);
2) группы, заданной в задаче 5.4.18;
3) нециклической группы шестого порядка (см. 5.4.27);
4) циклической группы четвертого порядка.

7.2.7.Т Пусть G — произвольная группа. Доказать, что представление группы G левыми сдвигами является изоморфным представлением.

7.2.8. Доказать, что в каждой группе G найдется подгруппа H такая, что представление φ_H будет являться представлением левыми сдвигами. Что это за подгруппа?

7.2.9. Пусть G — мультипликативная группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix},$$

где a, b — произвольные рациональные числа и $a \neq 0$. Пусть H — подгруппа G, состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что:

1) представление φ_H группы G по подгруппе H несущественно отличается от представления φ группы G преобразованиями множества рациональных чисел, отличных от нуля, согласно которому

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = u_a,$$

где $u_a x = ax$ для любого рационального x;

2) представление φ_H неизоморфное.

7.2.10.У. Пусть G — группа из задачи 5.2.21. Доказать, что:

1) для любого натурального числа n группа G обладает транзитивным представлением преобразованиями степени n;

2) группа G имеет по крайней мере два существенно отличающихся друг от друга представления преобразованиями девятой степени.

7.2.11.Т. Пусть H — подгруппа группы G. Доказать, что образ представления группы G по подгруппе H является транзитивной группой преобразований (см. гл. IV, § 9).

7.2.12. Пусть G — группа из задачи 5.4.18, $H_1 = \{e, a\}$, $H_2 = \{e, bab\}$. Доказать, что представления группы G по подгруппам H_1, H_2 несущественно отличаются друг от друга.

7.2.13.У. Пусть H_1 и H_2 — сопряженные подгруппы группы G. Доказать, что представления группы G по подгруппам H_1 и H_2 несущественно отличаются друг от друга.

7.2.14.У. Пусть представления группы G по подгруппам H_1 и H_2 несущественно отличаются друг от друга. Доказать, что H_1 и H_2 — сопряженные подгруппы группы G.

Примечание. В задачах 7.2.13 и 7.2.14 получено необходимое и достаточное условие того, чтобы два представления группы по подгруппам несущественно отличались друг от друга.

7.2.15. Пусть H — подгруппа группы G, и пусть φ_H — представление группы G по подгруппе H. Доказать, что элементы группы G, преобразующиеся в единицу при этом представлении, содержатся в H и образуют нормальный делитель группы G, который является максимальным среди нормальных делителей G, содержащихся в H.

7.2.16.Т. Доказать, что если подгруппа H группы G содержит неединичный нормальный делитель G, то представление группы G по подгруппе H неизоморфное.

7.2.17.Т.У. Доказать, что если подгруппа H группы G не содержит неединичных нормальных делителей группы G, то представление группы G по подгруппе H изоморфное.

Примечание. В задачах 7.2.16 и 7.2.17 получено необходимое и достаточное условие того, чтобы представление группы по подгруппе было изоморфным.

7.2.18. Пусть $H=[(1234),\ (24)]$ — подгруппа симметрической группы S_4. Является ли представление группы S_4 по подгруппе H изоморфным?

7.2.19.Т. Пусть φ — представление группы G преобразованиями множества Ω, и пусть α — произвольный, но фиксированный элемент из Ω. Обозначим через H множество элементов $g \in G$ таких, что для $\varphi(g)$ элемент α является неподвижной точкой. Доказать, что H — подгруппа G.

7.2.20.Т. Пусть сохраняются условия и обозначения предыдущей задачи, и пусть для некоторого $x \in G$ выполняется равенство $\varphi(x)(\alpha)=\beta$. Доказать, что для каждого элемента $y \in xH$ выполняется $\varphi(y)(\alpha)=\beta$, а для каждого $z \notin xH$ выполняется $\varphi(z)(\alpha) \neq \beta$.

Примечание. Сопоставьте результаты двух последних задач с результатами задачи 4.9.5.

7.2.21.Т.У. Пусть сохраняются условия и обозначения задачи 7.2.19, и пусть $\varphi(G)$ — транзитивная группа. Доказать, что отображение ω, определенное равенством $\omega(\gamma)=xH$ $(\gamma \in \Omega)$, если $\varphi(x)(\alpha)=\gamma$, является взаимно однозначным отображением множества Ω на множество правых смежных классов группы G по подгруппе H.

7.2.22.Т.У. Пусть сохраняются условия и обозначения задачи 7.2.19, и пусть $\varphi(G)$ — транзитивная группа. Доказать, что представление φ несущественно отличается от представления группы G по подгруппе H.

7.2.23.У. Пусть G — группа, определенная в задаче 5.4.18. Доказать, что G имеет изоморфные транзитивные представления четвертой степени, существенно отличающиеся друг от друга.

7.2.24. Доказать, что группа G из предыдущей задачи имеет три изоморфных транзитивных представления преобразованиями, существенно отличающихся друг от друга. Найти эти представления.

7.2.25.Т. Доказать, что любые два изоморфных транзитивных представления абелевой группы несущественно отличаются друг от друга.

7.2.26. Выяснить, имеет ли группа кватернионов (см. 2.6.39) изоморфные транзитивные представления преобразованиями степени меньше восьми.

7.2.27.У. В симметрической группе S_4 взяты подгруппы $H_1 = [(1234)]$, $H_2 = [(12), (34)]$. Найти образы элементов (12), (1234) при представлениях φ_{H_1}, φ_{H_2}.

7.2.28.У. Доказать, что представления φ_{H_1}, φ_{H_2} предыдущей задачи являются изоморфными представлениями группы S_4, существенно отличающимися друг от друга.

7.2.29.У. Доказать, что симметрическая группа S_4 имеет только два изоморфных транзитивных существенно отличающихся друг от друга представления шестой степени.

7.2.30. Пусть G — нециклическая группа четырнадцатого порядка (см. 5.4.27). Доказать, что G не обладает транзитивными изоморфными представлениями степени меньше семи.

7.2.31. Доказать, что все транзитивные представления седьмой степени группы G из предыдущей задачи несущественно отличаются друг от друга.

7.2.32. Пусть φ — представление группы G преобразованиями множества Ω, у которого группа $\varphi(G) = G'$ интранзитивна. Если M_i — некоторая система интранзитивности группы G', то обозначим через φ_i отображение G в группу преобразований множества M_i, согласно которому $\varphi_i(g) = u_i$, если $\varphi(g) = u$, где u_i — преобразование, определенное в задаче 4.9.28. Доказать, что φ_i — транзитивное представление группы G.

7.2.33. Пусть G — группа, v_g — преобразование множества G, определенное равенством

$$v_g(x) = xg \, (x \in G).$$

Обозначим через ψ отображение группы G в полугруппу всех преобразований множества G, согласно которому

$$\psi(g) = v_g.$$

Для каких групп это отображение является представлением группы G преобразованиями?

§ 3. Представления групп матрицами

Для работы с настоящим параграфом необходимо знание элементов теории матриц. Все рассматриваемые в этом параграфе матрицы имеют своими элементами комплексные числа. Представление группы G в классе всех групп квадратных неособенных

матриц порядков n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) называется представлением группы G матрицами. Если образ представления состоит из матриц порядка n, то говорят о представлении группы матрицами порядка n.

Два представления T_1 и T_2 группы G квадратными матрицами порядка n называют эквивалентными, если найдется такая неособенная матрица A порядка n, что для каждого $a \in G$ имеет место следующее соотношение:

$$T_2(a) = AT_1(a)A^{-1}.$$

Пусть T_i ($i = 1, \ldots, k$) — представления группы G квадратными матрицами порядков m_i. Отображение T, сопоставляющее каждому элементу $a \in G$ клеточно-диагональную матрицу $T(a)$ порядка $n = m_1 + \ldots + m_k$ с диагональными клетками $T_1(a), T_2(a), \ldots, T_k(a)$, является *представлением группы G матрицами порядка* $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ (см. 7.3.13). Представление T называется *прямой суммой* представлений $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Представление T группы G матрицами, которое эквивалентно прямой сумме представлений группы G меньших порядков, называется *вполне приводимым представлением*. Иногда вполне приводимые представления называют *разложимыми* представлениями.

Пусть T — представление группы G матрицами порядка n, и пусть найдется такая неособенная матрица P, что для всех $x \in G$ матрицы $S(x) = PT(x)P^{-1}$ имеют следующий вид:

$$S(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) & 0 \\ A(x) & T_2(x) \end{pmatrix},$$

где $T_1(x)$ и $T_2(x)$ — квадратные матрицы порядков m_1 и m_2 ($m_1 + m_2 = n$), $A(x)$ — прямоугольная матрица, имеющая m_2 строк и m_1 столбцов, 0 — нулевая матрица, имеющая m_1 строк и m_2 столбцов. Тогда представление T называется *приводимым* представлением группы G, в противном случае T называют *неприводимым* представлением.

Очевидно, что вполне приводимое (разложимое) представление приводимо. Однако обратное утверждение не имеет места (см. 7.3.16).

Для конечных групп каждое приводимое представление является вполне приводимым (см. 7.3.20).

7.3.1. Пусть G — произвольная группа. Доказать, что отображение $T_0: T_0(a) = E_n$ ($a \in G$), где E_n — единичная матрица порядка n, есть представление группы G квадратными матрицами порядка n. Доказать, далее, что при всяком представлении группы G матрицами порядка n единице G соответствует матрица E_n.

Примечание. Представление T_0 называется *единичным* представлением группы G квадратными матрицами порядка n.

7.3.2. Пусть S_n — симметрическая группа n-й степени, и пусть $s \in S_n$:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим через T отображение группы S_n в группу квадратных неособенных матриц порядка n такое, что $T(s) = (a_{ij})$, где $a_{1i_1} = a_{2i_2} = \dots = a_{ni_n} = 1$, а остальные элементы матрицы (a_{ij}) равны нулю. Доказать, что T есть представление группы S_n матрицами.

7.3.3. Пусть G — группа вращений трехмерного векторного пространства R_3 вокруг оси Oz и $g \in G$ — поворот на угол φ_g. Доказать, что отображение T:

$$T(g) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_g & -\sin\varphi_g & 0 \\ \sin\varphi_g & \cos\varphi_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \in G,$$

есть представление G матрицами.

7.3.4. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2\}$ и определяющей совокупностью соотношений: $a_1^3 = e$, $a_2^2 = e$, $a_2 a_1 = a_1^2 a_2$. Проверить, что $G = \{e, a_1, a_1^2, a_2, a_1 a_2, a_1^2 a_2\}$. Будет ли представлением G следующее отображение T:

$$T(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad T(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T(a_1^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad T(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T(a_1 a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad T(a_1^2 a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.3.5. Пусть G — группа вращений трехмерного пространства R_3 вокруг некоторой оси, и пусть элемент $g \in G$

осуществляет поворот на угол φ_g. Будет ли отображение T:

$$T(g)=\begin{pmatrix}\varphi_g & 0\\ 0 & \varphi_g\end{pmatrix}$$

представлением G квадратными матрицами порядка 3?

7.3.6. Группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2\}$ и определяющей совокупностью соотношений $a_1^2=e$, $a_2^2=e$. Определим отображение T порождающего множества $\{a_1, a_2\}$ в группу G' квадратных неособенных матриц порядка 2:

$$T(a_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}; \qquad T(a_2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Можно ли отображение T продолжить (см. гл. I, § 2) до отображения T' группы G так, чтобы T' было представлением G матрицами порядка 2?

7.3.7. Пусть G — мультипликативная группа отличных от нуля комплексных чисел. Доказать, что существует изоморфное представление G матрицами порядка 2 с вещественными элементами.

7.3.8.У. Доказать, что произвольная конечная группа порядка n имеет неединичное представление матрицами порядка n.

7.3.9. Пусть G — группа, и пусть T — представление группы G матрицами порядка n. Если A — произвольная неособенная матрица порядка n, то отображение T_A: $T_A(a)=AT(a)A^{-1}$ $(a\in G)$ есть представление группы G матрицами. Доказать.

7.3.10. Существуют ли неединичные представления симметрической группы S_n квадратными матрицами порядка n, отличные от представления, указанного в 7.3.2?

7.3.11. Пусть G — группа вращений трехмерного векторного пространства R_3 вокруг оси Ox, и пусть элементу $g\in G$ соответствует угол поворота φ_g. Доказать, что отображение T':

$$T'(g)=\begin{pmatrix}\cos\varphi_g+2\sin\varphi_g & -5\sin\varphi_g & 3\cos\varphi_g+16\sin\varphi_g-3\\ \sin\varphi_g & -2\sin\varphi_g+\cos\varphi_g & 7\sin\varphi_g-2\cos\varphi_g+2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

является представлением группы G матрицами порядка три.

7.3.12. Доказать, что все представления группы G матрицами, эквивалентные данному представлению, эквивалентны между собой.

7.3.13.Т. Пусть T_i $(i=1, \ldots, k)$ — представления группы G квадратными матрицами порядков m_i. Обозначим через T следующее отображение группы G в группу квадратных неособенных матриц порядка $n=m_1+\ldots+m_k$.

Каждому элементу $a \in G$ сопоставляется клеточно-диагональная матрица $T(a)$ с диагональными клетками $T_1(a)$, $T_2(a), \ldots, T_k(a)$. Доказать, что отображение T является представлением группы G матрицами порядка n.

7.3.14.Т. Пусть T_1' и T_2' — два эквивалентных представления группы G матрицами порядка m; T_1'' и T_2'' — два эквивалентных представления группы G матрицами порядка k. Обозначим через T_1 прямую сумму представлений T_1' и T_1'', а через T_2 — прямую сумму представлений T_2' и T_2''. Доказать, что T_1 и T_2 — эквивалентные представления группы G матрицами порядка $m+k$.

7.3.15. Пусть $G=[a]$ — бесконечная циклическая группа. Рассмотрим отображение

$$T(a^n)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \qquad (n=0, \pm 1, \ldots).$$

Будет ли T вполне приводимым представлением?

7.3.16. Пусть T — неприводимое представление группы матрицами порядка n, и пусть X — ненулевой столбец высоты n, тогда множество всех линейных комбинаций столбцов вида $T(a)X$ представляет собой все пространство столбцов высоты n. Доказать.

7.3.17.Т.У. Пусть представление T группы G матрицами порядка n неприводимо, и пусть квадратная матрица A порядка n перестановочна со всеми матрицами $T(a)$ $(a \in G)$. Доказать, что A — скалярная матрица, т. е. $A=\lambda E_n$ при некотором числе λ (E_n — единичная матрица порядка n).

7.3.18.Т.У. Пусть G — конечная группа и T — приводимое представление G матрицами порядка n. Доказать, что T является вполне приводимым представлением группы G.

7.3.19.Т.У. Каждое приводимое представление конечной группы G матрицами есть прямая сумма неприводимых представлений группы G. Доказать.

7.3.20.У. Пусть T — неприводимое представление конечной группы G матрицами порядка n, и пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n. Обозначим через X матрицу $\sum_{g \in G} T(g) A T(g^{-1})$. Доказать, что найдется такое число λ, для которого $X = \lambda E_n$, где E_n — единичная матрица порядка n.

7.3.21.Т.У. Доказать, что всякое представление абелевой группы матрицами порядка $n \geqslant 2$ приводимо.

§ 4. Группы гомоморфизмов абелевых групп

Пусть A и B — произвольные абелевы группы. Рассмотрим множество $\Phi(A, B)$ всех представлений группы A в классе, состоящем из одной группы B. В множестве $\Phi(A, B)$ введем действие, полагая $\chi_1\chi_2 = \chi_3$ $(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \Phi(A, B))$, если для любого $a \in A$ в группе B выполняется $\chi_1(a) \cdot \chi_2(a) = \chi_3(a)$ (см. 7.4.1). Относительно указанного выше действия $\Phi(A, B)$ образует абелеву группу (см. 7.4.2).

Группу $\Phi(A, B)$ в этом параграфе будем называть *группой гомоморфизмов* или *группой представлений* группы A в B. Указанное выше действие в множестве $\Phi(A, B)$ можно рассматривать и для произвольных групп, только в этом случае действие может оказаться не всюду определенным на $\Phi(A, B)$.

Если $A = B$, то $\Phi(A, B)$ есть множество эндоморфизмов группы A. Относительно введенного выше действия $\Phi(A, A)$ образует группу, которую будем называть *группой эндоморфизмов*. Таким образом, в множестве $\Phi(A, A)$ имеется два действия: действие, введенное выше, и действие суперпозиции (см. гл. III, § 4). В настоящем параграфе, говоря о действии в $\Phi(A, A)$, будем все время иметь в виду действие, определенное выше.

Хотя новое действие, так же как и действие суперпозиции, будем обозначать точкой, следует помнить, о каком именно действии идет речь в настоящем параграфе.

7.4.1. Пусть χ_1 и χ_2 — гомоморфизмы абелевой группы A в абелеву группу B, тогда отображение χ_3, определенное по следующему правилу: $\chi_3(a) = \chi_1(a) \cdot \chi_2(a)$ $(a \in A)$, есть гомоморфизм группы A в группу B. Доказать.

7.4.2. Доказать, что относительно действия, указанного во введении, множество $\Phi(A, B)$ всех гомоморфизмов абелевой группы A в абелеву группу B образует абелеву группу.

7.4.3. Пусть A и B — бесконечные циклические группы. Найти группу $\Phi(A, B)$.

7.4.4. Пусть A — бесконечная циклическая группа. Доказать, что для любой абелевой группы B группа $\Phi(A, B)$ изоморфна B.

7.4.5. Пусть A — периодическая абелева группа; B — абелева группа без кручения. Найти $\Phi(A, B)$.

7.4.6. Пусть A и B — примарные циклические группы порядков $p_1^{k_1}$ и $p_2^{k_2}$ соответственно. Доказать, что $\Phi(A, B)$ — циклическая группа порядка $p_1^{\min(k_1; k_2)}$, если $p_1 = p_2$, и $\Phi(A, B)$ — единичная группа, если $p_1 \neq p_2$.

7.4.7. Пусть A — циклическая примарная группа порядка p^n, а B — произвольная абелева группа. Определить $\Phi(A, B)$.

7.4.8. Найти группу эндоморфизмов абелевой группы G порядка pq, где p и q — различные простые числа.

7.4.9. Доказать, что группа эндоморфизмов аддитивной группы рациональных чисел R изоморфна R.

7.4.10.Т. Если группа A является прямым произведением абелевых групп H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то при любой абелевой группе B группа $\Phi(A, B)$ изоморфна прямому произведению групп $\Phi(H_i, B)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Доказать.

7.4.11.У. Пусть абелева группа A задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3\}$ и определяющей совокупностью соотношений $a_1^2 = e$, $a_2^5 = e$, и пусть B — бесконечная циклическая группа. Найти $\Phi(A, B)$.

7.4.12.У. Пусть конечно порожденная абелева группа A имеет ранг r, а B — бесконечная циклическая группа. Найти $\Phi(A, B)$.

7.4.13.У. Пусть A — конечная абелева группа, заданная инвариантами 3^2, 3; 2, и пусть B — циклическая группа порядка 2. Найти $\Phi(A, B)$.

7.4.14.У. Пусть конечная абелева группа A задана инвариантами

$$5^3,\ 5^2,\ 5,\ 5,\ 5;$$

$$3^3,\ 3^3,\ 3,\ 3;$$

$$2^8,\ 2^7,\ 2,\ 2,$$

и пусть B — циклическая группа порядка 25. Найти группу $\Phi(A, B)$.

7.4.15.У. Группа A представляет собой прямое произведение циклической группы порядка 7 и бесконечной циклической группы; B — циклическая группа порядка 49. Найти $\Phi(A, B)$.

7.4.16.У. Пусть B — смешанная абелева группа, периодическая часть которой есть циклическая группа порядка 5,

и пусть A — конечная абелева группа, заданная инвариантами 3^2, 3, 3, 3; 5^5; 7^3, 7, 7, 7. Найти группу $\Phi(A, B)$.

7.4.17.Т. Пусть B — прямое произведение абелевых групп B_i $(i=1, \ldots, n)$. Тогда при любой абелевой группе A группа $\Phi(A, B)$ изоморфна прямому произведению групп $\Phi(A, B_i)$ $(i=1, \ldots, n)$. Доказать.

7.4.18.У. Для следующих пар конечных абелевых групп A и B, заданных инвариантами, найти $\Phi(A, B)$:

1) A — циклическая группа порядка 5, B имеет набор инвариантов 3^2, 3; 5; 7^3, 7;

2) A имеет инварианты 2^3, 2, 2; 3^2, 3; 5, 5, 5;
B имеет инварианты 5^2, 5; 3^3, 3^2; 7^3, 7;

3) A имеет инварианты 5^3, 5^2, 5; 3^3, 3^2, 3; 2;
B имеет инварианты 2; 7^3, 7^2, 7; 11.

7.4.19.У. Для следующих пар абелевых групп A и B, заданных порождающими множествами и определяющими совокупностями соотношений, найти $\Phi(A, B)$:

1) $A=[a_1, a_2, a_3]$, $a_1^5=e$, $a_1a_2=a_2a_1$,
$a_1a_3=a_3a_1$, $a_2a_3=a_3a_2$;
$B=[b_1, b_2]$, $b_1^3=e$, $b_1b_2=b_2b_1$;

2) $A=[a_1, a_2]$, $a_1^2a_2^3=e$, $a_1^4a_2^9=e$, $a_1a_2=a_2a_1$;
$B=[b_1, b_2]$, $b_1^3=e$, $b_1b_2=b_2b_1$;

3) $A=[a_1, a_2]$, $a_1^5a_2^{-7}=e$, $a_1a_2^2=e$, $a_1a_2=a_2a_1$;
$B=[b_1, b_2]$, $b_1^{17}=e$, $b_2^{17}=e$; $b_1b_2=b_2b_1$.

7.4.20.У. Найти группы эндоморфизмов следующих абелевых групп:

1) конечной группы, заданной инвариантами 2^3, 2^2, 2; 3^3, 3; 5^3, 5^2, 5; 7^2, 7;

2) конечной группы, заданной инвариантами 3, 3, 3; 5^2, 5, 5; 7, 7;

3) конечно порожденной группы ранга 2 с набором инвариантов 5, 5, 5; 7^3, 7;

4) группы, являющейся прямым произведением семи бесконечных циклических групп.

7.4.21.У. Доказать, что, если A и B — конечные абелевы группы, то и $\Phi(A, B)$ — конечная группа.

7.4.22.У. Доказать, что группа эндоморфизмов абелевой группы с конечным числом порождающих есть группа с конечным числом порождающих.

7.4.23.У. Пусть A — конечная абелева группа, а B — абелева группа с конечным числом порождающих. Доказать, что $\Phi(A, B)$ — конечная группа.

7.4.24.У. Пусть A — группа с конечным числом порождающих, а B — конечная группа. Доказать, что $\Phi(A, B)$ — конечная группа.

7.4.25. Порядки всех элементов абелевой группы A ограничены в совокупности натуральным числом k. Доказать, что порядки всех элементов группы $\Phi(A, B)$ при любой абелевой группе B ограничены в совокупности тем же числом k.

7.4.26. Пусть A — периодическая абелева группа.

1) Может ли группа эндоморфизмов группы A быть периодической группой с неограниченными в совокупности порядками элементов?

2) Может ли $\Phi(A, A)$ быть полной группой?

7.4.27. Пусть группа эндоморфизмов абелевой группы A есть полная группа. Доказать, что A — полная группа.

7.4.28.У. Когда абелева группа A с конечным числом порождающих имеет своей группой эндоморфизмов: 1) конечную циклическую группу; 2) бесконечную циклическую группу?

7.4.29. Пусть A — абелева группа, примарная относительно простого числа p, и пусть B — произвольная абелева группа. Существуют ли в $\Phi(A, B)$ отличные от единицы элементы χ_0, для которых уравнение $\chi^{p^k} = \chi_0$ разрешимо для любого натурального k?

7.4.30. Пусть B — абелева группа без кручения. Доказать, что для любой абелевой группы A группа $\Phi(A, B)$ есть группа без кручения.

7.4.31. Если B — полная абелева группа без кручения, то и $\Phi(A, B)$ для любой абелевой группы A является полной группой без кручения. Доказать.

7.4.32. Может ли полная абелева группа иметь своей группой эндоморфизмов периодическую абелеву группу?

7.4.33. Пусть A — полная абелева группа. Доказать, что $\Phi(A, B)$ при любой абелевой группе B является группой без кручения.

7.4.34.У. Пусть A — абелева группа с конечным числом порождающих. Выяснить, когда $\Phi(A, A)$ изоморфна A.

§ 5. Характеры групп

Характером представления T группы G квадратными матрицами порядка n называется следующее отображение χ группы G в множество комплексных чисел:

$$\chi(a) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

где a_{ii} — диагональные элементы матрицы $T(a)$. Для абелевых групп, согласно 7.3.21, неприводимое представление — это гомоморфизм в мультипликативную группу отличных от нуля комплексных чисел. Таким образом, для абелевых групп характер неприводимого представления является гомоморфизмом в мультипликативную группу отличных от нуля комплексных чисел. Совокупность всех гомоморфизмов абелевой группы G в мультипликативную группу всех комплексных чисел, по модулю равных единице, относительно действия, определенного в § 4 настоящей главы, образует группу. Эту группу называют *группой характеров* абелевой группы G.

7.5.1. Найти характеры представлений групп, указанных в задачах 7.3.3, 7.3.4 и 7.3.15.

7.5.2. Пусть T — представление группы S_n, указанное в задаче 7.3.2, и пусть χ — характер этого представления. Доказать, что $\chi(s) = k$ $(s \in S_n)$, где k — число неподвижных точек преобразования s.

7.5.3. Доказать, что характеры эквивалентных представлений группы G матрицами совпадают.

7.5.4. Пусть представление T группы G матрицами является прямой суммой представлений $T_1, T_2, \ldots, T_m$, и пусть χ — характер представления T, а χ_i — характеры представлений T_i $(i = 1, \ldots, m)$. Доказать, что $\chi(a) = \sum_{i=1}^{m} \chi_i(a)$ для каждого $a \in G$.

7.5.5. Существует ли неединичная группа G, у которой для всякого неизоморфного представления T матрицами порядка n характер χ представления T обладает следующим свойством: $\chi(a) = n$ для каждого $a \in G$?

7.5.6. Пусть x и y — сопряженные элементы группы G, и пусть χ — характер представления T группы G матрицами. Доказать, что $\chi(x) = \chi(y)$.

7.5.7.У. Найти все неприводимые представления циклической группы $[a]$ порядка n.

7.5.8.У. Доказать, что характеры всех неприводимых представлений конечной абелевой группы G представляют собой отображения, образами которых являются только корни из 1.

7.5.9. Найти группу характеров для следующих абелевых групп, заданных порождающим множеством и определяющей совокупностью соотношений:

1) $A=[a]$, $a^{p^k}=e$, где p — простое число;

2) $A=[a_1, a_2]$, $a_1^3=e$, $a_2^3=e$, $a_1a_2=a_2a_1$;

3) $A=[a_1, a_2]$, $a_1^2=a_2$, $a_2^5=e$, $a_1a_2=a_2a_1$.

7.5.10.Т.У. Доказать, что группа характеров конечной абелевой группы G изоморфна группе G.

7.5.11. Определить группу характеров бесконечной циклической группы.

7.5.12. Пусть G — абелева группа, являющаяся прямым произведением r бесконечных циклических групп. Найти группу характеров.

7.5.13 Каждый характер подгруппы конечной абелевой группы можно продолжить до характера всей группы. Доказать.

7.5.14.У. Пусть G — конечная абелева группа, и пусть $a_1, a_2 \in G$ $(a_1 \neq a_2)$. Тогда существует такой ее характер χ, для которого $\chi(a_1) \neq \chi(a_2)$. Доказать.

Примечание. Из этой задачи следует, что совокупность всех характеров конечной абелевой группы образует полную систему представлений (см. гл. VII, § 1) в классе, состоящем из одной мультипликативной группы всех комплексных чисел, модуль которых равен 1. Такой же результат имеет место и для произвольной абелевой группы.

ГЛАВА VIII

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

§ 1. Метрические пространства

Пусть M — некоторое множество и ρ — отображение декартова произведения $M \times M$ (гл. I, § 1) в множество вещественных неотрицательных чисел (другими словами, каждой паре (x, y) элементов из M сопоставлено вещественное число $\rho(x, y) \geqslant 0$). Это отображение называется *метрическим* или *метрикой*, если выполняются следующие условия:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всяких $x, y \in M$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для всяких $x, y, z \in M$.

Множество M, рассматриваемое относительно некоторой заданной в нем метрики ρ, называется *метрическим пространством* относительно метрики ρ. Элементы метрического пространства называются *точками* этого пространства.

Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ и $x, y \in M$. Число $\rho(x, y)$ называют *расстоянием* между точками x и y.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства называется *сходящейся* к точке $x_0 \in M$, если $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$. В этом случае пишут $x_n \to x_0$ или $\lim x_n = x_0$ и говорят, что предел x_n равен x_0. Точка a метрического пространства M называется *предельной* для подмножества $A \in M$, если существует последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ различных точек из A, сходящаяся к точке a.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства M называется *фундаментальной*, если

$$\lim_{n, m \to \infty} \rho(x_m, x_n) = 0.$$

Метрическое пространство M называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность сходится в нем к некоторой точке из M.

Метрическое пространство M называется *сепарабельным*, если в нем имеется счетное множество $A \subset M$ такое, что для каждого элемента $x \in M$ найдется последовательность $x_n \in A$, предел которой равен x. Подмножество E метрического пространства M на-

зывается *компактным* в пространстве M, если из любой последовательности $\{x_n\}$ точек множества E можно выделить сходящуюся в пространстве M подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Метрическое пространство называется *компактным*, если оно представляет собой компактное в самом себе подмножество.

Подмножество E метрического пространства M называется *ограниченным*, если найдется такое неотрицательное число k, что для любых $x, y \in E$ имеет место $\rho(x, y) \leqslant k$.

Если метрика ρ метрического пространства M такова, что все множество M является ограниченным множеством, то ρ называется *ограниченной метрикой*.

Пусть в множестве M заданы две метрики ρ_1 и ρ_2 такие, что из сходимости последовательности $\{x_n\}$ к точке x_0 относительно метрики ρ_1 следует сходимость последовательности $\{x_n\}$ к точке x_0 относительно ρ_2, и наоборот. Тогда метрики ρ_1 и ρ_2 называют *эквивалентными*.

Примерами метрических пространств служат так называемые n-мерные векторные пространства R_n ($n = 1, 2, \ldots$), т. е. декартовы произведения n множеств всех вещественных чисел R, в которых определены сложение и умножение на вещественное число по следующим правилам:

1) $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) =$
$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$;

2) $\lambda(a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$ $(a_i, b_i, \lambda \in R)$, а метрика ρ определена равенством $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ (см. 8.1.1, 3)).

8.1.1.У. Для следующих множеств M_i определены отображения ρ_i множеств $M_i \times M_i$ в множество неотрицательных вещественных чисел. Выяснить, какие из них являются метрическими отображениями:

1) M_1 — произвольное множество,

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y \end{cases} \quad (x, y \in M_1);$$

2) M_2 — множество вещественных чисел,

$$\rho_2(x, y) = |x - y| \qquad (x, y \in M_2);$$

3) M_3 — n-мерное векторное пространство,

$$\rho_3(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$;

4) $M_4 = [a]$ — конечная циклическая группа порядка n,

$$\rho_4(a^k, a^l) = |k - l|, \qquad 0 \leqslant k, \ l < n;$$

5) M_5 — группа квадратных неособенных матриц порядка 2,

$$\rho_5(x, y) = |D_x - D_y|,$$

где D_x и D_y — определители матриц x и y соответственно;

6) M_6 — симметрическая группа S_n,

$$\rho_6(x, y) = |x(1) - y(1)| \qquad (x, y \in S_n);$$

7) M_7 — симметрическая группа S_n,

$$\rho_7(x, y) = \max_{k \in \{1, 2, \ldots, n\}} |x(k) - y(k)| \qquad (x, y \in S_n).$$

8.1.2 Пусть $C_{[a, b]}$ — множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций.

1) Доказать, что отображение ρ:

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \qquad (f, g \in C_{[a, b]})$$

является метрическим отображением.

2) Будет ли метрикой следующее отображение ρ_1:

$$\rho_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \qquad (f, g \in C_{[a, b]})?$$

8.1.3. В множестве Ω задана метрика ρ. Выяснить, будут ли представлять собой метрику следующие отображения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

1) $\varphi_1(x, y) = \rho^2(x, y)$;

2) $\varphi_2(x, y) = \dfrac{1}{\rho(x, y) + 1}$;

3) $\varphi_3(x, y) = e^{\rho(x, y)} - 1$;

4) $\varphi_4(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)}$.

8.1.4. Пусть S — множество всех числовых последовательностей, и пусть

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots) \in S, \qquad y = (\eta_1, \ldots, \eta_k, \ldots) \in S.$$

Положим

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

Доказать, что относительно отображения ρ множество S образует метрическое пространство.

8.1.5. Пусть ρ — метрика в пространстве Ω; k — некоторое вещественное положительное число. Доказать, что отображение $\bar{\rho}$, согласно которому

$$\bar{\rho}(x, y) = \min(\rho(x, y); k) \qquad (x, y \in \Omega),$$

является метрическим.

8.1.6. Пусть ρ — метрика в пространстве Ω. Выяснить, каковы должны быть вещественные числа a и b, чтобы отображение φ, согласно которому

$$\varphi(x, y) = a \cdot \rho(x, y) + b \qquad (x, y \in \Omega),$$

также являлось метрикой.

8.1.7. В множестве Ω заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Выяснить, будут ли представлять собой метрику следующие отображения ψ_1, ψ_2, ψ_3:

1) $\psi_1(x, y) = \rho_1(x, y) + \rho_2(x, y)$;

2) $\psi_2(x, y) = e^{\rho_1(x, y)} + e^{\rho_2(x, y)}$;

3) $\psi_3(x, y) = \dfrac{\rho_1(x, y) + 1}{\rho_2(x, y) + 1}$.

8.1.8. Пусть x, y, z, u — произвольные точки метрического пространства с метрикой ρ; тогда

$$|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u).$$

Доказать.

8.1.9. Пусть Ω — метрическое пространство с метрикой ρ, и пусть $x_n, y_n \in \Omega$ $(n = 1, 2, \ldots)$; тогда, если x_n сходится к $x_0 \in \Omega$ и y_n сходится к $y_0 \in \Omega$, то $\rho(x_n, y_n)$ сходится к $\rho(x_0, y_0)$. Доказать.

8.1.10. Пусть в метрическом пространстве Ω последовательность x_n сходится к x_0 и x_n сходится к x_0'. Доказать, что $x_0 = x_0'$.

8.1.11. Пусть в $C_{[a, b]}$ (см. 8.1.2) задана метрика $\rho(f, g) = \max|f(x) - g(x)|$, и пусть последовательность $f_n \in C_{[a,b]}$ сходится к функции f в смысле метрики $C_{[a, b]}$. Будет ли последовательность функций f_n равномерно сходиться к функции f? Пусть последовательность функций $f_n \in C_{[a, b]}$ равномерно сходится к функции $f \in C_{[a, b]}$; будет ли последовательность f_n сходиться к f в смысле метрики ρ?

8.1.12. Доказать, что в метрическом пространстве каждая сходящаяся последовательность фундаментальна.

8.1.13. Доказать, что метрическое пространство вещественных чисел с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ является полным пространством.

8.1.14. Будут ли полными метрическими пространствами следующие множества:

1) множество рациональных чисел R с метрикой ρ_1:

$$\rho_1(x, y) = |x - y| \qquad (x, y \in R);$$

2) множество числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где x_n сходится к нулю при $n \to \infty$, с метрикой ρ_2:

$$\rho_2(x, y) = \max_n |x_n - y_n|;$$

3) множество всех ограниченных непрерывных функций, заданных на вещественной прямой, с метрикой ρ_3:

$$\rho_3(f, g) = \sup_x |f(x) - g(x)|;$$

4) множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, с метрикой ρ из 8.1.2, 1)?

8.1.15. Пусть в множестве R всех вещественных чисел введена метрика ρ_2 из 8.1.1, 2). Доказать, что R является сепарабельным метрическим пространством.

8.1.16.У. Пусть $C_{[a, b]}$ — метрическое пространство непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, с метрикой ρ из 8.1.2, 1). Доказать, что $C_{[a, b]}$ сепарабельно.

8.1.17.У. Пусть M_T — множество всех вещественных ограниченных функций, определенных на бесконечном множестве T. Можно ли в множестве M_T ввести метрику так, чтобы M_T являлось несепарабельным метрическим пространством?

8.1.18. Будут ли компактными метрическими пространствами следующие множества:

1) множество вещественных чисел относительно метрики ρ:

$$\rho(x, y) = |x - y| \qquad (x, y \in R);$$

2) n-мерное векторное пространство R_n относительно метрики $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$;

3) пространство всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с метрикой ρ из 8.1.2, 1).

8.1.19. Доказать, что отрезок является компактным множеством в метрическом пространстве вещественных чисел (см. 8.1.13).

8.1.20.У. Доказать, что любая метрика эквивалентна ограниченной метрике.

8.1.21.Т. Доказать, что компактное подмножество метрического пространства ограничено.

8.1.22.Т. Доказать, что компактное метрическое пространство полно.

8.1.23.Т. Пусть заданы метрические пространства M и N, и пусть $R = M \times N$ — декартово произведение множеств M и N. Определим отображение ρ_1 множества $R \times R$ следующим образом:

$$\rho_1[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2)$$

$$(x_1, x_2 \in M; \quad y_1, y_2 \in N).$$

Доказать, что R является метрическим пространством относительно отображения ρ_1.

Примечание. Пространство R называется *произведением* пространств M и N.

8.1.24. Пусть метрические пространства M и N компактны. Доказать, что их произведение также компактно.

8.1.25. Пусть метрические пространства M и N полны. Доказать, что их произведение $M \times N$ также является полным пространством.

8.1.26. Пусть M и N — сепарабельные метрические пространства. Доказать, что их произведение также является сепарабельным пространством.

8.1.27. Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ и M' — подмножество M. Определим отображение ρ' множества $M' \times M'$ в множество вещественных неотрицательных чисел:

$$\rho'(x', y') = \rho(x', y') \qquad (x', y' \in M').$$

Доказать, что относительно отображения ρ' множество M' является метрическим пространством.

Примечание. Пространство M' называют *подпространством* M.

8.1.28. Доказать, что всякое подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно.

8.1.29. Доказать, что всякое подпространство компактного метрического пространства компактно.

8.1.30. Пусть R — метрическое пространство вещественных чисел в 8.1.13. Доказать, что в R существуют компактные подпространства.

Примечание. Результат сравнить с задачей 8.1.18, 1).

8.1.31. Пусть $M = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Рассмотрим следующее отображение ρ множества $M \times M$:

$$\rho(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j; \\ 1, & \text{если } i \text{ и } j \text{ четные } (i \neq j); \\ 2, & \text{если или } i \text{ или } j \text{ нечетное } (i \neq j). \end{cases}$$

Проверить, что ρ является метрикой на множестве M, и доказать, что ρ эквивалентна метрике из задачи 8.1.1, 1).

8.1.32. Пусть $G = [a]$ — бесконечная циклическая группа. Рассмотрим отображение ρ множества $G \times G$ в множество неотрицательных вещественных чисел:

$$\rho(a^k, a^l) = |k - l| \qquad (l, k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

Проверить, что отображение ρ является метрикой, и доказать, что ρ эквивалентна метрике из задачи 8.1.1, 1).

§ 2. Группы непрерывных преобразований метрического пространства

Преобразование f метрического пространства M называется *непрерывным*, если для всякой точки $x_0 \in M$ и всякой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящейся к точке x_0, последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к точке $f(x_0)$. Обратимое преобразование f метрического пространства M называется *взаимно непрерывным*, если f само непрерывно и обратное к нему преобразование также непрерывно.

Совокупность всех обратимых взаимно непрерывных преобразований метрического пространства M образует группу относительно действия суперпозиции преобразований (см. 8.2.6). Группа обратимых преобразований G метрического пространства M такая, что всякий элемент f из G является непрерывным преобразованием, называется *группой непрерывных преобразований* M.

Пусть G — группа непрерывных преобразований метрического пространства M, и пусть $f, g \in G$. Тогда если существует

$$\sup_{x \in M} \rho(f(x), g(x)),$$

то естественно сопоставить паре элементов (f, g) число

$$\rho^*(f, g) = \sup_{x \in M} \rho(f(x), g(x)).$$

Если для каждой пары элементов f, $g \in G$ существует число $\sup\limits_{x \in M} \rho(f(x), g(x))$, то ρ^* является метрикой в множестве G (см. 8.2.17). Обычно ρ^* называют *естественной метрикой* группы непрерывных преобразований метрического пространства M.

Существуют такие метрические пространства, что в группе непрерывных преобразований этих пространств нельзя ввести естественную метрику (см. 8.2.22). Однако в каждом метрическом пространстве M с метрикой ρ существует ограниченная метрика ρ_0, эквивалентная метрике ρ. В группе непрерывных преобразований метрического пространства M относительно метрики ρ_0 уже, конечно, можно ввести естественную метрику (см. 8.2.23).

Обратимое преобразование f метрического пространства M с метрикой ρ называется *изометрическим преобразованием* или *движением* пространства M, если для всяких x, $y \in M$ имеет место

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y).$$

Если R_3 — трехмерное эвклидово пространство, то R_3 является метрическим пространством относительно метрики 8.1.1, 3) и, следовательно, можно говорить о движениях метрического пространства R_3. Понятие движения метрического пространства R_3 совпадает с понятием движения трехмерного пространства, которое рассматривалось в гл. III, § 5 (см. 8.2.10). Таким образом, понятие движения метрического пространства есть обобщение понятия движения прямой, плоскости, трехмерного пространства, и, следовательно, настоящий параграф в той его части, которая посвящена движениям, является продолжением § 5 гл. III.

8.2.1. Пусть M — метрическое пространство и x_0 — фиксированная точка M. Доказать, что преобразование f такое, что $f(x) = x_0$ для всех $x \in M$, является непрерывным преобразованием M.

8.2.2. Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = y; \\ 1, & \text{если} \quad x \neq y \end{cases} \qquad \text{(см. 8.1.1, 1)).}$$

Доказать, что всякое преобразование M является непрерывным преобразованием, а всякое обратимое преобразование M является взаимно непрерывным.

8.2.3. Какие из следующих функций являются непрерывными преобразованиями метрического пространства вещественных чисел (см. 8.1.1, 2)):

1) $f_1(x) = x^2 + 5$;

2) $f_2(x) = \dfrac{1}{x^3 + 2}$;

3) $f_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число;} \end{cases}$

4) $f_4(x) = ax + b$, где a и b — фиксированные вещественные числа;

5) $f_5(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| > 2; \\ 0, & \text{если } |x| \leqslant 2. \end{cases}$

8.2.4. Пусть R — метрическое пространство вещественных чисел с метрикой 8.1.1, 2). Какие вещественные функции, определенные на всем R, являются непрерывными преобразованиями R, какие взаимно непрерывными?

8.2.5.Т. Доказать, что произведение двух непрерывных преобразований метрического пространства является непрерывным преобразованием.

8.2.6.Т.У. Доказать, что совокупность всех взаимно непрерывных обратимых преобразований метрического пространства образует группу преобразований.

8.2.7. Доказать, что любое движение метрического пространства M является взаимно непрерывным преобразованием M.

8.2.8. Пусть R_3 — трехмерное векторное пространство. Введем в R_3 метрику, как указано в 8.1.1, 3). Обозначим через Ф некоторую фигуру в R_3 (некоторое подмножество R_3), а через G — группу самосовмещений фигуры Ф (см. гл. III, § 5). Доказать, что G является группой непрерывных преобразований метрического пространства R_3.

8.2.9.У. Доказать, что совокупность всех движений метрического пространства образует группу непрерывных преобразований.

8.2.10. Пусть M — трехмерное векторное пространство, и пусть в M введена метрика, как указано в 8.1.1, 3). Доказать, что преобразование f метрического пространства M является движением метрического пространства тогда и только тогда, когда f удовлетворяет определению движения, данному в гл. III, § 5.

8.2.11. Пусть R — метрическое пространство вещественных чисел (см. 8.1.1, 2)). Рассмотрим множество G всевозможных преобразований s множества R, определяемых следующим образом: $s(x) = x + a$ $(x \in R)$, где a — произвольное, но фиксированное вещественное число. Доказать, что каждое

преобразование из G является движением метрического пространства R. Образует ли G группу непрерывных преобразований?

8.2.12. Пусть R_n является n-мерным векторным пространством. Введем в R_n метрику, как указано в 8.1.1, 3). Рассмотрим совокупность G всех преобразований f_α метрического пространства R_n, задаваемых формулой

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n$; α — произвольное отличное от нуля вещественное число. Доказать, что каждое f_α является обратимым взаимно непрерывным преобразованием R_n и что G образует группу непрерывных преобразований R_n.

8.2.13. Пусть R_n является n-мерным векторным пространством. Введем в R_n метрику, как указано в 8.1.1, 3), и пусть G — совокупность всех невырожденных линейных преобразований пространства R_n на себя. Доказать, что каждое $f \in G$ является взаимно непрерывным преобразованием метрического пространства R_n и G образует группу непрерывных преобразований R_n.

8.2.14. Пусть f — непрерывное преобразование метрического пространства M и M' — компактное подмножество M. Доказать, что образ M' при преобразовании f является компактным подмножеством.

8.2.15. Пусть f — непрерывное преобразование компактного метрического пространства с метрикой ρ. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x, y \in M$ таких, что $\rho(x, y) < \delta$, имеет место неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Доказать.

8.2.16.У. Пусть M — компактное метрическое пространство с метрикой ρ, и пусть f и g — непрерывные преобразования пространства M; тогда существует

$$\max_{x \in M} \rho(f(x), g(x)).$$

Доказать.

8.2.17. Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ и G — группа непрерывных преобразований пространства M такая, что для всяких $f, g \in G$ существует $\sup\limits_{x \in M} \rho(f(x), g(x))$.

Тогда отображение ρ^*:

$$\rho^*(f, g) = \sup_{x \in M} \rho(f(x), g(x))$$

является метрическим отображением множества $G \times G$, т. е. G допускает естественную метрику. Доказать.

8.2.18.У. Пусть G — группа всех движений компактного метрического пространства M (см. 8.2.9). Доказать, что в G можно ввести естественную метрику.

8.2.19.У. Пусть G — группа всех движений компактного метрического пространства M, и пусть в G введена естественная метрика ρ^* (см. 8.2.18). Доказать, что G является компактным метрическим пространством.

8.2.20. Пусть G — группа взаимно непрерывных преобразований метрического пространства R вещественных чисел (см. 8.1.1, 2)), определенная в 8.2.11. Можно ли ввести в G естественную метрику?

8.2.21. Пусть M — множество точек отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим отображение ρ, согласно которому

$$\rho(x, y) = |x - y| \qquad (x, y \in M).$$

Проверить, что ρ — метрическое отображение. Пусть G — группа всех обратимых взаимно непрерывных преобразований M (см. 8.2.6). Доказать, что в G можно ввести естественную метрику.

8.2.22. Пусть G — группа взаимно непрерывных преобразований метрического пространства R_1 вещественных чисел (см. 8.1.1. 2)), определенная так же, как в 8.2.12. Можно ли ввести в G естественную метрику?

8.2.23.У. Доказать, что в каждом метрическом пространстве M с метрикой ρ существует метрика ρ_0, эквивалентная метрике ρ, такая, что в группе непрерывных преобразований M относительно ρ_0 можно ввести естественную метрику.

§ 3. Топологические пространства

Пусть R — некоторое множество. Преобразование φ множества H_R всех подмножеств R называется ***операцией замыкания*** на множестве R, если φ удовлетворяет следующим условиям:

1) если $M \subset R$ состоит из одного элемента, то $\varphi(M) = M$;
2) если $M, N \in H_R$, то $\varphi(M \cup N) = \varphi(M) \cup \varphi(N)$;
3) $\varphi(\varphi(M)) = \varphi(M)$ для всякого $M \in H_R$.

Множество $\varphi(M)$ $(M \in H_R)$ называется *замыканием* подмножества M и обозначается через $\overline{M}$. Этого обозначения будем придерживаться в дальнейшем. В случае, когда для множества R задано преобразование φ множества всех подмножеств R, являющееся операцией замыкания, то говорят, что операция замыкания φ *определяет топологию* в R или что в R введена топология. Множество R называют *топологическим пространством* относительно операции замыкания φ.

Подмножество F топологического пространства R называется замкнутым, если $\overline{F} = F$. Другими словами, замкнутые множества и только они являются неподвижными точками преобразования φ. Множество $G \subset R$ называется *открытым*, если $R \setminus G$ — замкнутое множество (см. гл. I, § 1).

Некоторая система открытых множеств Σ топологического пространства R называется *базисом*, если каждое открытое подмножество R может быть представлено в виде объединения множеств из Σ.

Очевидно, что каждое топологическое пространство имеет *базис*. Отображение f топологического пространства R в топологическое пространство R' называется *непрерывным*, если для всякого множества $M \subset R$ выполнено соотношение $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.

Отображение f топологического пространства R на топологическое пространство R' называется *гомеоморфным*, или *топологическим*, если оно:

1) взаимно однозначно;

2) сохраняет операцию замыкания, т. е. $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$ для всякого $M \subset R$.

Таким образом, гомеоморфные топологические пространства могут отличаться лишь природой или обозначением элементов.

Отображение f топологического пространства R в топологическое пространство R' называется *открытым*, если всякое открытое множество U топологического пространства R переходит при отображении f в открытое множество $f(U)$.

8.3.1.Т. Пусть M — метрическое пространство и H_M — множество всех подмножеств M. Положим $\varphi(M') = \overline{M'}$ $(M' \subset H_M)$, где $\overline{M'}$ состоит из всех элементов M' и всех его предельных точек. Доказать, что множество M является топологическим пространством относительно преобразования φ.

8.3.2. Для следующих множеств A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ заданы преобразования φ_i множества всех подмножеств A_i.

Какие из указанных преобразований являются операциями замыкания?

1) A_1 — некоторое бесконечное множество. Если M — конечное подмножество, то $\varphi_1(M) = M$; если M — бесконечное подмножество, то $\varphi_1(M) = A_1$.

2) $A_2 = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Если M — конечное подмножество, то $\varphi_2(M) = M$; если M бесконечное, то

$$\varphi_2(M) = M \bigcup a_0.$$

3) $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$, причем, если $M = \{a_2, a_3\}$, то

$$\varphi_3(M) = \{a_2, a_1\}.$$

4) $A_4 = \{\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Для любого $M \subset A_4$ положим $\varphi_4(M) = M \bigcup a_0$.

5) $A_5 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Если M — бесконечное подмножество, то $\varphi_5(M) = M$. Если $M = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, то

$$\varphi_5(M) = M \bigcup \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}, \text{ где } n = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}.$$

8.3.3. Пусть A — произвольное множество. Доказать, что в A можно ввести топологию и притом единственным образом так, чтобы любое подмножество A в этой топологии было открытым множеством.

Примечание. Указанная в задаче топология называется *дискретной*.

8.3.4. Пусть $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Определим замыкание на множестве всех подмножеств A, как указано в задаче 8.3.2, 2).

Выяснить, какие из перечисленных ниже подмножеств открыты, какие замкнуты.

1) $M_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$;
2) $M_2 = A \diagdown \{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$;
3) $M_3 = \{a_3, a_4, a_5\}$;
4) $M_4 = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$;
5) $M_5 = \{a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2k}, \ldots\}$.

8.3.5. Пусть R — топологическое пространство, M и N — произвольные подмножества R. Доказать, что выполняются следующие соотношения:

1) $M \subset \overline{M}$; 2) если $M \subset N$, то $\overline{M} \subset \overline{N}$; 3) $\overline{M \bigcap N} \subset \overline{M} \bigcap \overline{N}$;

4) если M — конечное подмножество R, то $\overline{M} = M$.

8.3.6. Пусть k — положительное число, а x_0 — произвольный фиксированный элемент метрического пространства R.

Доказать, что совокупность всех элементов $x \in R$ таких, что $\rho(x, x_0) \leqslant k$, образует замкнутое множество относительно топологии, определенной в 8.3.1.

8.3.7. Пусть R_0 — множество всех вещественных чисел. Введем в R_0 топологию относительно метрики $\rho(x, y) = |x - y| (x, y \in R_0)$, как указано в 8.3.1. Доказать, что в полученном топологическом пространстве каждое открытое множество есть объединение счетного числа замкнутых множеств.

Примечание. Топологическое пространство R_0 называют обычно *вещественной прямой.*

8.3.8. Пусть A — некоторое множество точек на вещественной прямой. Обозначим через A' множество всех предельных точек A. Существует ли на прямой множество A_0 такое, что $A_0'' = (A_0')'$ непусто, а множество $A_0''' = (A_0'')'$ пусто?

8.3.9. Найти замыкание множества всех рациональных точек вещественной прямой (см. 8.3.7).

8.3.10.Т. Доказать, что в топологическом пространстве:

1) пересечение произвольного множества замкнутых множеств есть замкнутое множество;

2) объединение конечного множества замкнутых множеств есть замкнутое множество.

8.3.11. Пусть M — метрическое пространство, в котором введена топология, как указано в 8.3.1; k — произвольное положительное число. Доказать, что для любого $x_0 \in M$ совокупность всех точек $x \in M$ таких, что $\rho(x, x_0) < k$, образует открытое множество.

8.3.12. Доказать, что всякое замкнутое множество F на вещественной прямой (см. 8.3.7) есть пересечение счетного множества открытых множеств.

8.3.13.Т. Доказать, что в топологическом пространстве:

1) объединение произвольного множества открытых множеств есть открытое множество;

2) пересечение конечного множества открытых множеств есть открытое множество.

8.3.14. Пусть в полном метрическом пространстве M с метрикой ρ топология введена так, как указано в 8.3.1. Доказать, что всякое замкнутое подмножество $M' \subset M$ является полным метрическим пространством относительно метрики ρ', рассматриваемой на M' (см. 8.1.27).

8.3.15. Пусть M — некоторое подмножество топологического пространства R и Σ — совокупность всех замкнутых подмножеств из R, содержащих M. Обозначим через D пересечение всех множеств из Σ. Доказать, что $\overline{M}=D$.

8.3.16. Пусть R — вещественная прямая (см. 8.3.7). Существуют ли такие различные множества F_1, $F_2 \subset R$, что $\overline{F}_1=\overline{F}_2$?

8.3.17. Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ; n — натуральное число, x_0 — точка пространства M. Обозначим через Σ совокупность всех множеств $M_{x_0, n} \subset M$, состоящих из всех элементов $x \in M$, для которых $\rho(x, x_0) < \frac{1}{n}$. Доказать, что Σ образует базис в топологии, введенной в 8.3.1.

8.3.18.Т. Для того чтобы система открытых множеств Σ топологического пространства R была базисом, необходимо и достаточно, чтобы для каждого открытого множества $G \subset R$ и всякой точки $a \in G$ нашлось множество $U \in \Sigma$ такое, что $a \in U \subset G$. Доказать. Каждое ли топологическое пространство имеет базис?

8.3.19. Пусть $M \subset R$, где R — топологическое пространство, и пусть Σ — базис R. Доказать, что $a \in \overline{M}$ тогда и только тогда, когда для каждого U из Σ, содержащего a, пересечение множеств U и M не пусто.

8.3.20.Т Пусть Σ — базис топологического пространства R, тогда:

1) для всяких двух различных a, $b \in R$ найдется $U \in \Sigma$ такое, что $a \in U$, но $b \notin U$;

2) для всяких U, $V \in \Sigma$ и для всякого $a \in U \cap V$ найдется $W \in \Sigma$ такое, что $a \in W \subset U \cap V$. Доказать.

8.3.21.Т.У. Пусть R — некоторое множество и Σ — некоторая совокупность его подмножеств, для которой выполнены следующие условия:

1) для всяких двух различных точек a и b из R найдется такое множество U из Σ, что $a \in U$, но $b \notin U$;

2) для всяких двух множеств U и V из Σ, содержащих точку $a \in R$, найдется такое множество W из Σ, что $a \in W \subset U \cap V$.

Пусть M — произвольное подмножество R. Обозначим через $\overline{M}$ совокупность всех элементов $a \in R$, для которых всякое множество U из Σ, содержащее a, имеет с M непу-

стое пересечение. Рассмотрим преобразование φ множества всех подмножеств R такое, что $\varphi(M) = \overline{M}$. Доказать, что преобразование φ является операцией замыкания. Будет ли Σ базисом полученного топологического пространства?

Примечание. Сравнить результаты задач 8.3.20 и 8.3.21.

8.3.22. Пусть R_0 — вещественная прямая (см. 8.3.7). Рассмотрим систему Σ, состоящую из всех открытых промежутков, концами которых служат рациональные числа.

1) Образует ли Σ базис вещественной прямой?

2) Доказать, что Σ удовлетворяет условию задачи 8.3.21.

3) Пусть в R_0 введена топология с помощью системы Σ, как указано в 8.3.21. Будет ли полученная топология совпадать с топологией, введенной в 8.3.7?

8.3.23. Пусть M — метрическое пространство, а f — непрерывное преобразование M (см. гл. VIII, § 2). Определим в M топологию, как указано в 8.3.1. Является ли f непрерывным преобразованием топологического пространства M?

8.3.24. Пусть $C_{[a,\,b]}$ — метрическое пространство непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, с метрикой 8.1.2, 1). Определим в $C_{[a,\,b]}$ топологию, как указано в 8.3.1. Пусть R_0 — множество вещественных чисел с топологией, введенной в 8.3.7.

Непрерывны ли следующие отображения $C_{[a,\,b]}$ в пространстве R_0:

1) $F_1(y) = y(a) \quad (y \in C_{[a,\,b]})$;

2) $F_2(y) = \max\limits_{x \in [a,\,b]} |y(x)| \quad (y \in C_{[a,\,b]})$;

3) $F_3(y) = \max\limits_{x \in [a,\,b]} y(x) \quad (y \in C_{[a,\,b]})$;

4) $F_4(y) = \int\limits_a^b y(x)\,dx \quad (y \in C_{[a,\,b]})$;

5) $F_5(y)$ равно 0, если $y(x)$ принимает хотя бы одно отрицательное значение; $F_5(y)$ равно $1/2$, если $y(x) = 0$ при всех x; $F_5(y)$ равно 1, если $y(x) \geqslant 0$ и $y(x_0) \neq 0$ хотя бы при одном x_0?

8.3.25. Пусть g — взаимно однозначное отображение топологического пространства R на себя, и пусть g и g^{-1} — непрерывные преобразования. Всегда ли g является гомеоморфизмом топологического пространства R на себя?

8.3.26.Т. Для того чтобы отображение g топологического пространства R в топологическое пространство R' было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы полный прообраз любого замкнутого множества $F' \subset R'$ при отображении g был замкнутым множеством. Доказать.

8.3.27.Т Для того чтобы отображение g топологического пространства R в R' было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы полный прообраз любого открытого множества $U' \subset R'$ при отображении g был открытым множеством. Доказать.

8.3.28.Т.У. Для того чтобы отображение g топологического пространства R в топологическое пространство R' было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a \in R$ и каждого открытого множества $U' \subset R'$, содержащего $a' = g(a)$, нашлось бы открытое множество $U \subset R$ такое, что $g(U) \subset U'$. Доказать.

8.3.29.Т.У. Для того чтобы отображение g топологического пространства R в топологическое пространство R' было открытым, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a \in R$ и каждого открытого множества U, содержащего a, нашлось такое открытое множество $U' \subset R'$, содержащее $a' = g(a)$, что $U' \subset g(U)$. Доказать.

8.3.30.Т.У. Пусть H — декартово произведение топологических пространств $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Для произвольных открытых множеств $U_1, U_2, \ldots, U_n$ $(U_i \subset R_i)$ обозначим через $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ множество всех элементов из H, представимых в виде $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in U_i$. Обозначим через Σ совокупность всех множеств $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$, где $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — произвольные открытые множества из $R_1, R_2, \ldots, R_n$ соответственно. Пусть в множестве всех подмножеств H введено преобразование так, как указано в 8.3.21. Доказать, что относительно введенного преобразования H образует топологическое пространство.

Примечание. Полученное топологическое пространство H называется *прямым произведением* топологических пространств $R_1, \ldots, R_n$.

8.3.31. Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ, и пусть M' — метрическое пространство, состоящее из всех элементов M, причем метрика в M' определена следующим образом:

$$\rho_1(x, y) = k\rho(x, y) \quad (x, y \in M')$$

(k — фиксированное положительное число; см. 8.1.6). Определим топологии в M и M', исходя из метрик ρ и ρ_1, как указано в 8.3.1. Будут ли полученные топологии совпадать?

8.3.32. Пусть C — множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$; введем в C метрики, как указано в 8.1.2, 1) и 2). Исходя из этих метрик, определим в C топологии (см. 8.3.1). Будут ли полученные топологии совпадать?

8.3.33. Пусть H — прямое произведение n топологических пространств вещественных прямых (см. 8.3.7). Определим в H метрику ρ:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in H; \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in H;$$
$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Введем в H топологию, исходя из метрики ρ (см. 8.3.1). Доказать, что исходная топология (см. 8.3.30) совпадает с топологией, введенной с помощью метрики ρ.

8.3.34.Т. В множестве R введены различные топологии с базисами Σ_1 и Σ_2 соответственно (см. 8.3.18). Пусть для каждого множества U из Σ_1 и всякой точки $a \in U$ найдется такое U' из Σ_2, что $a \in U' \subset U$, и для каждого V' из Σ_2 и всякой точки $a' \in V'$ найдется множество $V \in \Sigma_1$ такое, что $a' \in V \subset V'$. Доказать, что топологии эти совпадают.

8.3.35. Сформулировать и доказать утверждение, обратное утверждению задачи 8.3.34.

8.3.36. Пусть в множестве M даны две эквивалентные метрики ρ_1 и ρ_2. Доказать, что топологии, введенные в M, исходя из метрик ρ_1 и ρ_2 (см. 8.3.1), совпадают.

§ 4. Топологические группы

Пусть в множестве G задано некоторое действие (будем называть его умножением), относительно которого G является группой, и операция замыкания, относительно которой G является топологическим пространством. Множество G, рассматриваемое относительно этого действия и этой топологии, называется *топологической группой*, если выполнены следующие условия: для любых двух элементов $a, b \in G$ и всякого открытого множества W, содержащего ab^{-1}, найдутся такие открытые множества U и V, что $a \in U$, $b \in V$ и $UV^{-1} \subset W$, где V^{-1} — совокупность всех элементов, обратных к элементам из V.

Смысл последнего условия, связывающего групповое действие с топологией, заключается в следующем:

1) каждый левый сдвиг G (см. гл. VII, § 2) является непрерывным преобразованием G;

2) преобразование G, заключающееся во взятии обратного элемента для каждого элемента из G, является непрерывным преобразованием G (см. 8.4.5, 8.4.40).

Множество элементов топологической группы G, рассматриваемое только относительно группового действия, будем называть *алгебраической группой*. Указанное выше определение не противоречит определению гл. II, § 6, ибо в каждой группе G можно ввести топологию так, чтобы G относительно этой топологии являлась топологической группой (см. 8.4.15). Вообще в этом параграфе, рассматривая понятие группы, подгруппы, гомоморфизма и тому подобное в отношении лишь группового действия, мы будем обычно добавлять прилагательное «алгебраический»: алгебраическая подгруппа, алгебраический гомоморфизм, алгебраический изоморфизм и т. п. Обычно не вызывает недоразумений то, что алгебраическую группу обозначают той же самой буквой, что и исходную топологическую группу. Мы будем придерживаться такого же обозначения.

Некоторое подмножество H топологической группы G называется *подгруппой* топологической группы G, если:

1) H есть подгруппа алгебраической группы G;

2) H есть замкнутое подмножество топологического пространства G.

Подгруппа N топологической группы G называется ее *нормальным делителем*, если N есть нормальный делитель алгебраической группы G.

Отображение f топологической группы G на топологическую группу G' называется *топологическим изоморфизмом* или просто *изоморфизмом*, если:

1) f является изоморфным отображением алгебраической группы G на алгебраическую группу G';

2) f является топологическим отображением топологического пространства G на топологическое пространство G'.

Отображение g топологической группы G в топологическую группу G' называется *гомоморфным*, если:

1) g является гомоморфизмом алгебраической группы G в алгебраическую группу G';

2) g является непрерывным отображением топологического пространства G в топологическое пространство G'.

Гомоморфное отображение f топологической группы G в топологическую группу G' называется *открытым*, если f есть открытое отображение топологического пространства G в топологическое пространство G'.

Пусть Γ — топологическое пространство, и пусть G — некоторая топологическая группа обратимых преобразований пространства Γ (см. гл. III, § 2). Пусть в G для всяких $x \in G$ и $\xi \in \Gamma$ и всякого открытого множества $W \subset \Gamma$, содержащего $x(\xi)$, найдутся открытые множества $U \subset G$ и $\Phi \subset \Gamma$ такие, что $x \in U$, $\xi \in \Phi$ и для всяких $x' \in U$ и $\xi' \in \Phi$ имеет место $x'(\xi') \in W$. Тогда G называют *непрерыв-*

ной группой преобразований топологического пространства Г. Все преобразования $x \in G$ являются топологическими (см. 8.4.30).

Непрерывная группа преобразований пространства Г называется *транзитивной*, если транзитивна алгебраическая группа G преобразований Г (см. гл. IV, § 9).

8.4.1. Для следующих групп G_1, G_2 заданы преобразования φ_i $(i=1, 2)$ множества всех подмножеств G_i. Определить, какие из групп G_i являются топологическими группами:

1) G_1 — некоторая группа; $\varphi_1(M)=M$ для любого $M \subset G_1$;

2) G_2 — бесконечная циклическая группа $[a]_g$.

Если M — конечное подмножество, то $\varphi_2(M)=M$. Если M — бесконечное подмножество, то $\varphi_2(M)=M \cup e$.

8.4.2. Пусть D — вещественная прямая (см. 8.3.7). Будет ли D топологической группой относительно обычного сложения?

8.4.3. Пусть R_n является n-мерным векторным пространством, и пусть в R_n введена метрика

$$\rho[(x_1, \ldots, x_n); (y_1, \ldots, y_n)] = \\ = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}.$$

Определим в R_n топологию так, как указано в 8.3.1. Будет ли R_n топологической группой относительно обычного сложения векторов?

8.4 4. Пусть G — множество вещественных матриц $a=(a_{ij})$ порядка n с определителем, отличным от нуля, и пусть k — натуральное число. Рассмотрим систему Σ, состоящую из всех множеств U_{ak} таких, что U_{ak} содержит те и только те матрицы $x=(x_{ij})$, для которых $|x_{ij}-a_{ij}| < \frac{1}{k}$ $(i, j=1, \ldots, n)$. Доказать, что с помощью системы Σ можно определить топологию в G так, что в полученной топологии Σ будет являться базисом G (см. 8.3.21). Будет ли G топологической группой относительно введенной топологии и обычного умножения матриц?

8 4.5.У. Доказать, что, если a — фиксированный элемент топологической группы G, то каждое из указанных ниже отображений является топологическим отображением пространства G на себя:

1) $f_1(x)=xa$ $(x \in G)$;

2) $f_2(x)=ax$ $(x \in G)$;

3) $f_3(x)=x^{-1}$ $(x \in G)$.

8.4.6. Пусть F — замкнутое множество топологической группы G, U — открытое подмножество G, a — фиксированный элемент из G, P — произвольное подмножество G. Будут ли замкнуты Fa, aF, F^{-1}? Будут ли открыты UP, PU, U^{-1}?

8.4.7.Т. Пусть G — топологическая группа и a, b — произвольные элементы из G. Доказать, что найдется такое топологическое отображение f пространства G на себя, что $f(a) = b$.

8.4.8.Т. Пусть Σ^* — совокупность всех открытых множеств топологической группы G, содержащих единицу. Рассмотрим систему Σ, состоящую из всех множеств вида aU, где $a \in G$, $U \in \Sigma^*$. Доказать, что Σ — базис топологического пространства G.

8.4.9. Пусть G — аддитивная группа целых чисел, a — произвольный элемент из G и p_0 — произвольное фиксированное простое число. Обозначим через U_{ka} множество всех целых чисел вида $a + bp_0^k$ $(b \in G)$. Пусть совокупность Σ_{p_0} состоит из всех множеств U_{ka} (k — натуральное число, $a \in G$). Доказать, что Σ_{p_0} удовлетворяет условиям задачи 8.3.21. Будет ли G топологической группой относительно топологии, определяемой совокупностью Σ_{p_0}, и обычного сложения?

Пусть $p \neq q$ — два простых числа. Будут ли совпадать топологии, введенные в G с помощью систем Σ_p и Σ_q?

8.4.10. Пусть D — вещественная прямая. D является топологической группой относительно сложения (см. 8.4.2). Обозначим через C алгебраическую подгруппу целых чисел. Будет ли C топологической подгруппой группы D?

8.4.11.У. Пусть G — множество точек плоскости, G есть топологическая группа относительно действия и топологии, введенных в 8.4.3. Обозначим через N множество точек прямой с угловым коэффициентом α, через H — множество всех точек с целочисленными координатами.

1) Будут ли H и N подгруппами топологической группы G?

2) Выяснить, при каких α множество $P = H + N$ замкнуто.

8.4.12.Т.У. Пусть G — топологическая группа и H — подгруппа алгебраической группы G. Всегда ли $\overline{H}$ является подгруппой топологической группы G?

8.4.13.Т.У. Пусть G — топологическая группа, и пусть N — нормальный делитель алгебраической группы G. Доказать, что $\overline{N}$ является нормальным делителем топологической группы G.

8.4.14. Пусть φ — алгебраический изоморфизм топологической группы G на топологическую группу G', являющийся непрерывным отображением. Всегда ли φ является топологическим изоморфизмом?

8.4.15. Пусть в алгебраической группе G система Σ состоит из всех подмножеств G. Доказать, что: 1) существует и притом единственная топология в G, при которой Σ является базисом; 2) относительно введенной топологии G образует топологическую группу; 3) введенная топология является дискретной топологией (см. 8.3.3). Будет ли всякая алгебраическая подгруппа G топологической подгруппой G? Будет ли любой алгебраический изоморфизм G на топологическую группу G' непрерывным отображением G на G'? Будет ли всякий алгебраический изоморфизм G на топологическую группу G' топологическим изоморфизмом G на G'?

Примечание. Группа с дискретной топологией называется *дискретной группой.*

8.4.16. Пусть R_0 — топологическая группа вещественных чисел по сложению (см. 8.4.2). Пусть R'_0 — множество всех положительных вещественных чисел. Определим следующее отображение множества всех подмножеств R'_0 в себя: пусть $M \subset R'_0$; поставим в соответствие M множество $\overline{M}$, состоящее из всех элементов $a \in R'_0$, для которых существует последовательность $a_n \in M$ такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Доказать, что:

1) введенное отображение определяет топологию в R'_0;

2) относительно введенной топологии и действия умножения R'_0 образует топологическую группу. Изоморфны ли топологические группы R_0 и R'_0?

8.4.17.Т.У. Пусть H — алгебраическая подгруппа топологической группы G. Для того чтобы H была топологической подгруппой группы G, необходимо и достаточно, чтобы существовало открытое множество U, для которого $U \cap H = U \cap \overline{H} \neq \emptyset$. Доказать.

8.4.18. Пусть G — топологическая группа неособенных вещественных матриц порядка n (см. 8.4.4). Какие из следующих подмножеств будут подгруппами G, какие нормальными делителями G:

1) множество всех неособенных матриц с рациональными определителями;

2) множество всех неособенных диагональных матриц;

3) множество всех неособенных матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

4) множество всех матриц с определителем, равным 1?

8.4.19.Т.У. Пусть G — топологическая группа и H — ее подгруппа. Обозначим через G/H совокупность всех правых смежных классов группы G по подгруппе H, а через Σ некоторый базис топологической группы G. Пусть $U \in \Sigma$. Обозначим через U^* множество всех смежных классов xH, где $x \in U$. Совокупность всех множеств U^*, где U — произвольный элемент совокупности Σ, обозначим через Σ^*. Доказать, что в G/H можно ввести топологию так, чтобы Σ^* была базисом G/H.

8.4.20.Т.У. Пусть N — нормальный делитель топологической группы G, а G/N — фактор-группа алгебраической группы G по нормальному делителю N. Введем в G/N топологию, как указано в 8.4.19. Доказать, что G/N будет топологической группой.

Примечание. Топологическая группа G/N называется *фактор-группой* топологической группы G по ее нормальному делителю N.

8.4.21.У. Пусть N — нормальный делитель топологической группы G, и пусть G/N — фактор-группа G по нормальному делителю N. Рассмотрим естественный гомоморфизм φ (см. 2.4.18) алгебраической группы G на алгебраическую группу G/N. Будет ли φ непрерывным отображением топологического пространства G на топологическое пространство G/N? Будет ли φ открытым отображением G на G/N? Найти условие, при котором φ будет топологическим изоморфизмом топологической группы G на G/N.

8.4.22. Пусть f — гомоморфизм топологической группы G на топологическую группу G^*, и пусть N — полный прообраз единицы $e^* \in G^*$ при гомоморфизме φ (ядро гомоморфизма). Доказать, что N будет нормальным делителем топологической группы G.

8.4.23.У. Пусть g — открытое гомоморфное отображение топологической группы G на топологическую группу G^* и

N — ядро гомоморфизма g (см. 8.4.22). Доказать, что фактор-группа G/N (см. 8.4.20) топологически изоморфна топологической группе G^*.

8.4.24.Т. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — топологические группы, и пусть H — декартово произведение $G_1 \times \ldots \times G_n$. Введем в H операцию умножения, как в прямом произведении алгебраических групп $G_1, \ldots, G_n$ (см. 5.6.29). Пусть в H введена топология, как указано в 8.3.30. Доказать, что H является топологической группой.

Примечание. Группу H называют *прямым произведением* топологических групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

8.4.25.У. Пусть H — прямое произведение топологических групп $G_1, \ldots, G_n$. Каждому элементу $x_j \in G_j$ поставим в соответствие элемент $f(x_j) = (e_1, \ldots, e_{j-1}, x_j, e_{j+1}, \ldots, e_n) \in H$, где e_i — единица группы G_i ($i = 1, \ldots, n$). Доказать, что f есть изоморфизм топологической группы G_j в топологическую группу H.

8.4.26. Пусть Z — топологическая группа комплексных чисел по сложению (см. 8.4.3), и пусть $Z' = R_0 \times R_0$ — прямое произведение топологических групп вещественных чисел (см. 8.4.2). Изоморфны ли топологические группы Z и Z'?

8.4.27. Пусть Z — топологическая группа комплексных чисел по сложению (см. 8.4.3), и пусть A — множество всех пар вещественных чисел (x, y) таких, что $x \geqslant 0$;

$$0 \leqslant y \leqslant 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Обозначим через B множество всех пар вещественных чисел вида $(x, 0)$.

1) Будут ли множества A и B замкнутыми?

2) Замкнуто ли множество $A + B$?

8.4.28.Т.У. Пусть G — топологическая группа. Доказать, что для всякого открытого множества U и всякой точки $a \in U$ найдется такое открытое множество V, что $a \in V$ и $\overline{V} \subset U$.

8.4.29.Т.У. Пусть G — топологическая группа, и пусть A — центр алгебраической группы G. Доказать, что A является подгруппой топологической группы G.

8.4.30. Пусть G — непрерывная группа преобразований топологического пространства Γ, и пусть g — произвольный

элемент из G. Доказать, что g — топологическое преобразование пространства Г.

8.4.31. Пусть G' — совокупность всех обратимых топологических преобразований топологического пространства Г. Доказать, что G' образует алгебраическую группу относительно действия суперпозиции преобразований.

8.4.32. Всегда ли произведение двух непрерывных преобразований топологического пространства является непрерывным преобразованием?

8.4.33. Пусть G — непрерывная группа преобразований топологического пространства Г. Всякая ли подгруппа H группы G является непрерывной группой преобразований пространства Г? Пусть G — транзитивная группа преобразований пространства Г. Всякая ли подгруппа $H \subset G$ является транзитивной группой преобразований Г?

8.4.34. Пусть G — группа всех вращений плоскости D вокруг точки O. Введем на плоскости D топологию, как указано в 8.4.3. Доказать, что каждый $x \in G$ осуществляет топологическое преобразование D. Каждый поворот $x \in G$ вокруг точки O определяется углом поворота φ, поэтому естественно писать $x = x_\varphi$. Пусть $M \subset G$; поставим в соответствие M множество $\overline{M} \subset G$ следующим образом: будем считать, что элемент $x_0 = x_{\varphi_0} \in G$ тогда и только тогда принадлежит $\overline{M}$, когда существует последовательность углов $\{\varphi_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi_0$ и $x_{\varphi_n} \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Доказать, что G является топологической группой относительно введенного преобразования множества всех подмножеств. Является ли G непрерывной группой преобразований топологического пространства D?

8.4.35.У. Пусть H — множество точек плоскости. Введем в H топологию, как указано в 8.4.3. Обозначим через G группу всех аффинных преобразований (см. 3.4.27) плоскости H.

1) Доказать, что каждое аффинное преобразование есть топологическое преобразование плоскости H.

2) Можно ли в G ввести недискретную топологию так, чтобы G являлась непрерывной группой преобразований плоскости H?

8.4.36.Т.У. Пусть G — топологическая группа и H — ее подгруппа. Пусть в множестве G/H правых смежных классов топология определена так, как указано в 8.4.19. Определим

преобразование x соотношением $x(\xi) = x\xi$, где $x \in G$, $\xi \in G/H$. Доказать, что G есть транзитивная непрерывная группа преобразований топологического пространства G/H.

Примечание. Результат сопоставить с введением к § 2 гл. VII.

8.4.37.Т. Пусть G — непрерывная транзитивная группа преобразований топологического пространства Γ и α — некоторая фиксированная точка из Γ. Обозначим через A_ξ множество всех $x \in G$, для которых $x(\alpha) = \xi$ $(\xi \in \Gamma)$. Доказать, что A_α есть подгруппа топологической группы G.

8.4.38.Т.У. Пусть G — непрерывная группа преобразований топологического пространства Γ и A_ξ $(\xi \in \Gamma)$ определено так же, как в задаче 8.4.37. Доказать, что отображение ψ, согласно которому $\psi(\xi) = A_\xi$, есть взаимно однозначное отображение множества Γ на множество G/A_α правых смежных классов G по подгруппе A_α. Будет ли ψ^{-1} непрерывным отображением топологического пространства G/A_α (см. 8.4.19) на пространство Γ?

8.4.39.У. Пусть M — метрическое пространство с ограниченной метрикой ρ (см. гл. VIII, § 1). Доказать, что в группе преобразований G метрического пространства M можно ввести естественную метрику ρ^*. Пусть в M и G введены топологии, как указано в 8.3.1, относительно метрик ρ и ρ^* соответственно. Доказать, что G есть непрерывная группа преобразований топологического пространства M.

8.4.40. Пусть в множестве G задано некоторое действие, относительно которого G является группой, и операция замыкания, относительно которой G является топологическим пространством, и пусть выполняются следующие два условия:

1) каждый левый сдвиг G (см. гл. VII, § 2) является непрерывным преобразованием G;

2) преобразование φ такое, что $\varphi(a) = a^{-1}$ $(a \in G)$, является непрерывным преобразованием G.

Доказать, что G является топологической группой.

§ 5. Упорядоченные группы

Пусть в множестве элементов группы G определено отношение упорядоченности (см. гл. I, § 3). Если это отношение двусторонне стабильно (см. гл. I, § 3), то G относительно этой упорядоченности называется *упорядоченной группой*. В частности, при линейной упорядоченности говорят о *линейно упорядоченной группе*

(иногда в литературе термин «упорядоченная группа» применяют лишь для линейно упорядоченных групп).

В упорядоченной группе G элемент $x \in G$ называется *положительным*, если $x \geqslant e$, и *отрицательным*, если $x \leqslant e$. Множество всех положительных элементов G обозначается через G^+ и называется *положительной частью* G (также полугруппой положительных элементов, что связано с 8.5.6). Множество всех отрицательных элементов обозначается через G^- и называется *отрицательной частью* G (полугруппой отрицательных элементов). Употребление приведенных терминов делается естественным при аддитивной записи действия в группе. В этом случае единичный элемент группы часто называют *нулем* и обозначают через 0, а обратный элемент к элементу x обозначается через $-x$. Соотношение положительности выглядит при такой записи как $x \geqslant 0$.

8.5.1. Доказать, что в упорядоченной группе G соотношение $x \leqslant y$ имеет место тогда и только тогда, когда $x^{-1}y \geqslant e$.

Примечание. Отсюда следует, что задание положительной части в упорядоченной группе вполне определяет упорядоченность.

8.5.2. Доказать, что в упорядоченной группе G соотношение $x \leqslant y$ имеет место тогда и только тогда, когда $y^{-1}x \leqslant e$.

Примечание. Отсюда следует, что задание отрицательной части также вполне определяет упорядоченность.

8.5.3. Пусть Z — аддитивная группа комплексных чисел. Выяснить, какие из следующих упорядоченностей в группе Z будут двусторонне стабильными. Найти для них положительную и отрицательную части.

1) $z_1 \geqslant z_2$, если или $a_1 > a_2$, или $a_1 = a_2$, но $b_1 \geqslant b_2$ $(z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i)$;

2) $z_1 \geqslant z_2$, если $\arg(z_2 - z_1) \in [\alpha, \beta]$, где α и β — фиксированные углы, удовлетворяющие соотношению $0 \leqslant \beta - \alpha < \pi$;

3) $z_1 \geqslant z_2$, если $a_1 \geqslant a_2$, $b_1 \geqslant b_2$;

4) $z_1 \geqslant z_2$, если $\arg z_1 \geqslant \arg z_2$ и $|z_1| \geqslant |z_2|$.

8.5.4. Доказать, что в упорядоченной группе элемент x будет отрицательным тогда и только тогда, когда x^{-1} положителен.

8.5.5. Если в упорядоченной группе G неединичный элемент x имеет конечный порядок, то он не может быть ни положительным, ни отрицательным. Доказать.

8.5.6.Т Доказать, что в упорядоченной группе G ее положительная часть G^+ обладает свойствами:

а) если x, $y \in G^+$, то и $xy \in G^+$;
б) $e \in G^+$;
в) если $x \in G^+$, причем $x \neq e$, то x^{-1} не содержится в G^+;
г) если $x \in G^+$, $z \in G$, то $z^{-1}xz \in G^+$.

Примечание. Свойство а) означает, что G^+ является полугруппой.

8.5.7.Т.У. Пусть H — подмножество группы G, удовлетворяющее условиям:
а) если x, $y \in H$, то и $xy \in H$;
б) $e \in H$;
в) если $x \in H$, причем $x \neq e$, то x^{-1} не содержится в H;
г) если $x \in H$, $z \in G$, то $z^{-1}xz \in H$.

Доказать, что в G можно ввести такую двусторонне стабильную упорядоченность, относительно которой H будет положительной частью группы: $H = G^+$.

Примечание. Сопоставить с 8.5.6.

8.5.8. Пусть в группе G заданы двусторонне стабильные упорядоченности ρ_α, ρ_β, ... Положительные части группы G относительно этих упорядоченностей суть G_α^+, G_β^+, ... Доказать, что $G_\alpha^+ \cap G_\beta^+ \cap \ldots$ является положительной частью некоторой двусторонне стабильной упорядоченности τ группы G. Как связана упорядоченность τ с ρ_α, ρ_β, ...?

8.5.9. Доказать, что в упорядоченной группе G ее отрицательная часть G^- обладает свойствами:
а) если x, $y \in G^-$, то и $xy \in G^-$;
б) $e \in G^-$;
в) если $x \in G^-$, причем $x \neq e$, то x^{-1} не содержится в G^-;
г) если $x \in G^-$, $z \in G$, то $z^{-1}xz \in G^-$.

Примечание. Результат сопоставить с 8.5.6.

8.5.10. Доказать, что всякое подмножество группы G, являющееся ее положительной частью при некоторой двусторонне стабильной упорядоченности ρ, будет отрицательной частью G при некоторой другой двусторонне стабильной упорядоченности τ. Как связаны между собою эти две упорядоченности?

8.5.11. Доказать, что упорядоченность в упорядоченной группе G будет линейной тогда и только тогда, когда

$$G^+ \cup G^- = G.$$

8.5.12.У. Описать все возможные двусторонне стабильные упорядоченности в циклических группах.

8.5.13.У. Пусть G — аддитивная группа всех полиномов с действительными коэффициентами, а подмножество H состоит из всех полиномов, которые неотрицательны на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что H является положительной частью для некоторой двусторонне стабильной упорядоченности ρ. Для следующих элементов: $f_1(x) = x^2 + 1, f_2(x) = x^3 + 2, f_3(x) = x^3 + x^2 + 1$, $f_4(x) = x^8 - 1$ выяснить, какие их пары связаны отношением указанной упорядоченности ρ.

8.5.14.У. Пусть G — множество всех пар вещественных чисел. Введем в G действие

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, e^{x_2}y_1 + y_2).$$

Проверить, что G является группой относительно указанного действия. Доказать, что подмножество H, состоящее из всех элементов (x, y) таких, что или $x > 0$ или $x = 0$ и $y \geqslant 0$, является положительной частью для некоторой линейной двусторонне стабильной упорядоченности.

8.5.15. Пусть G есть прямое произведение групп: $G = \prod_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$, в каждой из которых задана двусторонне стабильная упорядоченность. Полагаем $x \leqslant y$ в группе G, если в каждом сомножителе G_α этого прямого произведения для компонент x_α и y_α элементов x и y (см. 5.6.14) имеет место $x_\alpha \leqslant y_\alpha$.

Выяснить, будет ли полученная упорядоченность в G двусторонне стабильной.

Пусть упорядоченности во всех G_α линейны. Выяснить, когда построенная упорядоченность в G будет линейной.

8.5.16. Пусть G есть свободное произведение групп $G = \prod^*_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$, в каждой из которых задана двусторонне стабильная упорядоченность. Полагаем $x \leqslant y$ в группе G, если x и y можно представить в виде

$$x = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n},$$
$$y = y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \ldots y_{\alpha_n},$$
$$x_{\alpha_i}, y_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i};\ x_{\alpha_i} \leqslant y_{\alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Выяснить, определяет ли это правило упорядоченность в G, и если так, то будет ли эта упорядоченность двусторонне стабильной.

8.5.17. Пусть G — свободное произведение двух циклических групп (конечных или бесконечных): $G=[x]*[y]$. Подмножество H группы G состоит из единичного элемента e и всех таких элементов, которые можно представить в виде

$$z=x^{a_1}y^{b_1}x^{a_2}y^{b_2}\ldots x^{a_n}y^{b_n},$$
$$a_1+a_2+\ldots+a_n>0.$$

Выяснить, когда существует двусторонне стабильная упорядоченность в G, относительно которой H является положительной частью: $H=G^+$.

8.5.18. Выяснить, когда для неединичного элемента x коммутативной группы G найдется такая двусторонне стабильная упорядоченность G, чтобы имело место $x\geqslant e$.

8.5.19. Доказать, что упорядоченность в бесконечной циклической группе $G=[x]$, согласно которой $x^p\leqslant x^q$ имеет место при $p\leqslant q$, является двусторонне стабильной.

8.5.20. Пусть в бесконечной циклической группе $G=[x]$ задана некоторая двусторонне стабильная упорядоченность, согласно которой $x\leqslant x^2$. Доказать, что тогда $x^p\leqslant x^q$ имеет место тогда и только тогда, когда $p\leqslant q$.

Примечание. Таким образом, соотношение $x\leqslant x^2$ полностью определяет упорядоченность, рассмотренную в 8.5.19.

8.5.21. Пусть в упорядоченной группе для любых двух ее элементов существует верхняя граница. Доказать, что тогда всякие два элемента обладают и нижней границей.

Примечание. Упорядоченные группы, обладающие этим свойством, называются *направленными*.

8.5.22.Т. Пусть G — направленная упорядоченная группа. Доказать, что для каждого $x\in G$ найдутся такие u, $v\in G^+$, что $x=uv^{-1}$.

8.5.23.Т. Пусть в упорядоченной группе G для всякого $x\in G$ всегда найдутся такие u, $v\in G^+$, что $x=uv^{-1}$. Доказать, что G является направленной.

Примечание. Результат сопоставить с результатом 8.5.22.

8.5.24. Выяснить, какие из упорядоченных групп, указанных в задачах 8.5.3, 1), 2) и 8.5.13, являются направленными.

8.5.25. Пусть G — совокупность вещественных матриц вида

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что:

1) относительно обычного умножения матриц G образует группу;

2) группа G обладает нетривиальной (отличной от диагонали) двусторонне стабильной линейной упорядоченностью.

8.5.26.У. Если абелева группа обладает хотя бы двумя различными двусторонне стабильными упорядоченностями, то число всех таких упорядоченностей в ней бесконечно. Доказать.

8.5.27. Пусть среди элементов центра группы имеются элементы бесконечного порядка. Доказать, что группа обладает нетривиальной (см. 8.5.25) двусторонне стабильной упорядоченностью.

8.5.28. Пусть центр группы обладает нетривиальной (см. 8.5.25) двусторонне стабильной упорядоченностью. Доказать, что тогда вся группа обладает нетривиальной двусторонне стабильной упорядоченностью.

УКАЗАНИЯ

Глава I

1.2.3. Использовать известный факт, что множество всех простых натуральных чисел бесконечно.

1.2.18. Для каждого M_k взять какое-либо его взаимно однозначное отображение φ_k в множество всех натуральных чисел. Выделить в $\bigcup\limits_k M_k$ подмножества $N_1, N_2, N_3, \ldots$, для которых $x \in N_k$, если при некотором l имеют место $x \in M_l$ и $l + \varphi_l(x) = k$. Каждое N_k конечно (или пусто) и $\bigcup\limits_k M_k = \bigcup\limits_k N_k$. Применить 1.2.17.

1.2.19. Представить множество всех рациональных чисел в виде объединения его подмножеств M_k $(k = 1, 2, \ldots)$, где в M_k включаются такие рациональные числа $\frac{p}{q}$ (p и q — целые числа), что $|p| + |q| = k$. Применить 1.2.17. **1.2.20.** Использовать 1.2.2.

1.2.21. Представить множество всех полиномов с рациональными коэффициентами в виде объединения его подмножеств M_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, где полином $\frac{p_0}{q_0}x^n + \frac{p_1}{q_1}x^{n-1} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}x + \frac{p_n}{q_n}$ (числа $p_0, p_1, \ldots, p_n, q_0, q_1, \ldots, q_n$ — целые) принадлежит M_k, если $n + \sum\limits_{i=0}^{n} |p_i| + \sum\limits_{j=0}^{n} |q_j| = k$. Применить 1.2.17.

1.2.23. Предположить, что существует отображение φ множества всех натуральных чисел на множество вещественных чисел r таких, что $0 \leqslant r \leqslant 1$. Каждое из этих чисел записать в виде бесконечной десятичной дроби:

$$\varphi 1 = 0,\ \varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\ \ldots,$$
$$\varphi 2 = 0,\ \varepsilon_{21}\varepsilon_{22}\varepsilon_{23}\ \ldots,$$
$$\varphi 3 = 0,\ \varepsilon_{31}\varepsilon_{32}\varepsilon_{33}\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(здесь ε_{ij} — знаки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Определить число $r = 0,\ \eta_1\eta_2\eta_3\ \ldots$, где $\eta_k = 1$, если $\varepsilon_{kk} \neq 1$, и $\eta_k = 2$, если $\varepsilon_{kk} = 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Убедиться, что при всех $m = 1, 2, 3, \ldots$ имеет место $\varphi m \neq r$, что противоречит определению φ.

1.2.24. Использовать 1.2.16 и 1.2.23.

1.2.25. Сначала доказать счетность множества всех алгебраических чисел, используя 1.2.17, 1.2.21 и то, что каждый полином имеет

лишь конечное количество корней. Затем доказать несчетность множеств всех вещественных чисел и всех комплексных чисел, используя 1.2.16 и 1.2.23. Наконец, доказать несчетность множеств всех вещественных трансцендентных чисел и всех трансцендентных чисел, используя 1.2.16 и 1.2.18.

1.2.26. Сначала доказать равномощность двух любых отрезков. Затем представить каждое из рассматриваемых множеств в виде непересекающегося объединения счетного множества отрезков.

1.2.27. Доказать существование взаимно однозначного отображения A в M. Допустить существование взаимно однозначного отображения φ множества A на M. Зафиксировать в B два элемента b, $b' \in B$, $b \neq b'$. Рассмотреть отображение ψ множества A в B, согласно которому $\psi a = b$, если φa отображает a в элемент, отличный от b, и $\psi a = b'$, если φa отображает a в b. Показать, что при всех $a \in A$ имеет место $\psi a \neq \varphi a$.

1.2.28. Для каждого подмножества N множества M определить отображение φ_N множества M в множество $\{1, 0\}$, полагая $\varphi_N x = 1$, если $x \in N$, и $\varphi_N x = 0$, если $x \notin N$. Показать, что множество всех φ_N совпадает с множеством всех отображений M в $\{1, 0\}$. Использовать 1.2.15 и 1.2.27.

1.3.18. Доказывать индукцией по числу элементов в множестве. Выделить в Ω один из максимальных элементов τ относительно ρ. Пользуясь индуктивным предположением, установить линейную упорядоченность σ в $\Omega \setminus \{\tau\}$ такую, что для любых элементов α и β этого множества из $\alpha \prec \beta\ (\rho)$ всегда следует $\alpha \prec \beta\ (\sigma)$. Исходя из σ, построить искомую упорядоченность ρ' в Ω.

Глава II

2.1.11. Рассмотреть отображение G на H, ставящее в соответствие числу $r \in G$ число $\lg r \in H$.

2.2.9. Использовать 1.4.1 и 1.4.4.

2.3.12. Взять пару элементов $x \in R$, $y \in L$ и рассмотреть их произведение xy.

2.3.13. Использовать 2.3.12.

2.3.18. Сначала доказать, что для матриц a и b ранг их произведения ab всегда не превосходит наименьшего из рангов матриц a и b. Затем доказать, что для двух матриц a и b равного ранга можно всегда подобрать такие матрицы x и y, что $a = xby$. Последнее можно доказать, используя элементарные преобразования матриц и то, что каждое элементарное преобразование всегда можно осуществить путем умножения матрицы слева или справа на специально подобранную неособенную матрицу.

2.4.22. Использовать 2.4.20 и 2.4.21.

2.5.1. Доказательство проводится по индукции относительно n — длины слова $x_1 x_2 \ldots x_n$. Для данного слова рассматриваются два процесса постепенного сокращения длины слова путем последовательной замены двух каких-либо соседних членов их произведением.

Пусть первый процесс начинается с замены пары $x_i x_{i+1}$ их произведением, а второй процесс — с замены пары $x_j x_{j+1}$ их произве-

дением. Следует рассмотреть порознь два случая. Первый, когда $i+1<j$, и второй, когда $i+1=j$.

2.5.16. Взять какой-либо из элементов a' таких, что $aa'a=a$. Затем рассмотреть элемент $\bar{a}=a'aa'$.

2.5.19. Рассмотреть в A отношение ρ_1, согласно которому $x\sim y\,(\rho_1)$ $(x,\ y\in A)$, если найдутся такие элементы $a,\ b\in A$ и $k,\ k'\in K$, что имеет место одно из четырех условий:

1) $x=akb,\ y=ak'b$; 2) $x=ak,\ y=ak'$; 3) $x=kb,\ y=k'b$; 4) $x=y$.

Рассмотреть в A отношение ρ_2, согласно которому $x\sim y\,(\rho_2)$, если найдутся такие элементы $t_1=x,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-1},\ t_n=y\in A$, что $t_i\sim t_{i+1}\,(\rho_1)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Доказать, что ρ_2 двусторонне стабильно. Рассмотреть A/ρ_2 и естественное отображение A на A/ρ_2, ставящее в соответствие каждому $x\in A$ тот ρ_2-класс, который содержит данный x.

2.5.23. Взять некоторый элемент x конечной полугруппы. Рассмотреть $[x]$. Использовать 2.5.10.

2.6.16. В качестве искомых элементов $y_1,\ \ldots,\ y_m$ взять некоторые подходящие степени самого x. Использовать известный из теории чисел факт, что для натуральных чисел $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m$, наибольший общий делитель которых есть d, всегда найдутся такие целые числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$, что $x_1k_1+x_2k_2+\ldots+x_mk_m=d$.

2.6.21. Использовать 2.6.7, рассматривая произвольную подгруппу G' группы $G=[x]_g$, выделить в ней элемент x^k с наименьшим натуральным показателем k. Сравнить G' с H_k.

2.6.22. Использовать 2.6.8 и указание к 2.6.21.

2.6.23. Использовать 2.6.21 и 2.6.22.

2.6.24. Использовать 2.6.21 и 2.6.23.

Глава III

3.1.26. Использовать 3.1.22 и 3.1.25.

3.1.31. Если $rv\leqslant n$, то подобрать подстановки $s,\ t$ так, что $sut=v$.

3.1.34. Использовать 3.1.25 и 3.1.26 и наличие единицы в группе.

3.1.35. Рассмотреть множество G всех преобразований v, удовлетворяющих условиям: 1) $v\alpha=v\beta$ тогда и только тогда, когда $u\alpha=u\beta$; 2) $v\Omega=u\Omega$. Доказать, что G — группа.

3.1.37. Использовать 3.1.18.

3.1.38. Доказывать индукцией по рангу преобразования, начиная с $n-2$.

3.1.39. Использовать тот факт, что преобразование ранга n нельзя представить в виде произведения преобразований меньшего ранга. Доказать, что, умножая подстановку ранга $n-1$ на подходяще выбранные подстановки ранга n, можно получить любую другую подстановку ранга $n-1$.

3.1.40. Использовать указание к предыдущей задаче.

3.2.6. Использовать 3.2.5.

3.2.8. Рассмотреть в множестве Ω бинарное отношение ρ, согласно которому $(\beta,\ \alpha)\in\rho$, если $u\beta=\alpha$. Доказать, что существует $v\in T_\Omega$ такое, что $\rho=\rho_v$ и что v — преобразование, обратное для u.

3.2.9. Использовать 3.2.7.

3.3.14. Доказать равенство $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k) = (\alpha_1\alpha_k)(\alpha_1\alpha_{k-1}) \ldots (\alpha_1\alpha_2)$.

3.3.16. Использовать 3.2.23 и 3.2.24. Доказать, что если $u = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$ — четная подстановка, то $v_n(\alpha_1 \ldots \alpha_n) > 0$; если u — нечетная подстановка, то $v_n(\alpha_1 \ldots \alpha_n) < 0$.

3.3.17. Использовать 3.2.25. Каждую четную подстановку умножить на транспозицию (12).

3.3.19. Использовать 3.3.5, 3.3.9 и 3.3.14.

3.3.21. Использовать 3.3.9 и 3.3.19. Доказать, что группа [(34), (123) (456)] не более чем тридцатого порядка.

3.3.23. Использовать 3.3.19.

3.3.24. Использовать 3.3.7.

3.3.26. Использовать 3.3.24 и доказать, что если два числа входят в один цикл в разложении подстановки u на независимые циклы, то они входят в разные циклы в разложении подстановки u' и обратно.

3.4.13. Использовать 3.4.4.

3.4.23. Использовать 3.4.4. Рассмотреть в множестве целых чисел упорядоченность, согласно которой натуральные числа упорядочены по величине, а остальные числа несравнимы.

3.4.27. Ввести систему координат и доказать, что если абсциссы точек M_1, M_2, M_3 связаны соотношением $x_1 < x_2 < x_3$, то это же верно и для абсцисс их образов.

3.4.30. Использовать 3.4.6.

3.4.32. 2) Доказать утверждение для преобразований ранга $n-1$ и провести индукцию по рангу.

3.4.34. Доказать, что

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \alpha & \alpha & \beta & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

— эндоморфизм Ω и что u не является регулярным элементом.

3.5.25. Использовать предыдущую задачу и тот факт, что для каждой пары вершин найдется самосовмещение тетраэдра, переводящее одну из этих вершин в другую.

3.5.28. Использовать указание к 3.5.25.

3.5.29. Использовать предыдущую задачу. Доказать, что только тождественная подстановка преобразует в себя каждую из четырех диагоналей куба. Рассмотреть множество преобразований диагоналей куба, соответствующих всем вращениям куба.

3.5.32. Использовать указание к 3.5.25.

3.6.8. Использовать теорему о существовании корней полинома.

3.6.22. Использовать 3.1.40, 3.3.19.

3.6.24. См. предыдущую задачу.

3.6.28. Доказать, что e_M — единица A, и использовать 3.6.5.

3.6.29. Используя свойства обратимости и определения pr_1, pr_2 для произведения, доказать, что для любых элементов u, v данной группы выполняются равенства $\mathrm{pr}_1\, u = \mathrm{pr}_1\, v$, $\mathrm{pr}_2\, u = \mathrm{pr}_2\, v$. Затем воспользоваться 2.6.1 и 3.6.12.

Глава IV

4.1.1. Использовать 2.6.19.

4.1.2. Использовать 4.1.1.

4.1.4. Объединение всевозможных правых смежных классов в силу 4.1.3 равно G. Исключить из этого объединения повторяющиеся классы, т. е. из каждой совокупности равных между собою классов оставить лишь один. Применить 4.1.2.

4.1.9. Использовать 2.6.21.

4.1.16. Доказать, что Hy^{-1} и Hz^{-1} равны тогда и только тогда, когда $yH = zH$. Учесть, что из $g = x_\xi h$ следует $g^{-1} = h^{-1} x_\xi^{-1}$.

4.1.20. Использовать 4.1.4 и 4.1.19. Правое разложение G по H дает разбиение всех n элементов группы на k подмножеств, каждое из которых состоит из m элементов.

4.1.21. Использовать 4.1.20 и 2.6.9.

4.1.23. Рассмотреть подмножество G, состоящее из всех элементов вица $u^{-1}v$, где $u, v \in K$, и подмножество, состоящее из всех элементов вида uv^{-1}, где $u, v \in K$.

4.1.26. Провести рассуждения, сходные с теми, при помощи которых доказывается возможность правого разложения группы по подгруппе (см. 4.1.2, 4.1.3 и 4.1.4).

4.1.30. Рассмотреть правое разложение H_1 по D, где D — пересечение H_1 и H_2. Умножить обе части получающегося равенства справа на H_2. Использовать 2.6.19.

4.2.10. Использовать 4.1.20 и 4.2.9.

4.2.24. Для $x \in K_1$ обозначаем через s_x число таких пар элементов (y, z) $(y \in K_2, z \in K_3)$, что $x = yz$. Доказать, что $s_x = s_{x'}$ для любых $x, x' \in K_1$. Показать, что $k_2 k_3 = k_1 s$, где $s = s_x$ для любого $x \in K_1$.

4.2.26. Рассмотреть произведение $(x^{-1} H_1 x) H_2$. Использовать 4.1.30 и 4.2.25.

4.2.27. Использовать 4.1.19, 4.1.30 и 4.2.26.

4.3.5. Использовать теорему об определителе произведения матриц.

4.3.12. Использовать предыдущую задачу.

4.3.17. Использовать 3.5.5. Доказать, что каждый смежный класс по N, отличный от N, состоит из вращений на некоторый угол φ вокруг всевозможных точек.

4.3.25. Рассмотреть разложение S_4 по группе Клейна. Всем элементам класса поставить в соответствие подстановку из этого класса, имеющую 4 неподвижной точкой.

4.3.26. Использовать 4.3.21 и 2.4.18.

4.3.27. Если $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, то найти $\varphi(g_1^{-1} g_2)$.

4.3.28. Использовать 4.3.27. Рассмотреть следующее отображение ψ группы G' в группу G/N: если $g' \in G'$, то $\psi(g') = gN$ — классу элементов, отображающихся в g' при данном гомоморфизме.

4.4.1. Рассмотреть равенство, приведенное в конце введения к § 2 настоящей главы, учитывая следствие 4.2.10.

4.4.2. Использовав 4.3.29 и 4.4.1, доказать коммутативность группы. Рассмотреть произведение двух различных циклических подгрупп группы и применить 4.1.30.

4.4.3. Доказывать по индукции относительно порядка группы. Взять произведение всех циклических подгрупп группы, порождаемых элементами, принадлежащими центру. Если среди этих подгрупп есть подгруппа порядка, делящегося на p, то в ней имеется элемент порядка p. Если этого нет, то согласно 4.1.30 порядок центра не делится на p. В этом случае, применив равенство, приведенное в конце введения к § 2 настоящей главы, получаем, что некоторое k_i не делится на p. Но k_i согласно 4.2.10 есть индекс некоторой собственной подгруппы группы. Раз индекс ее не делится на p, то по 4.1.20 должен делиться на p ее порядок. По индуктивному предположению эта подгруппа обладает элементом порядка p.

4.4.4. Использовать 4.4.3.

4.4.5. Использовать 4.1.30 и 4.4.3.

4.4.6. Доказывать индукцией по порядку группы. Для порядка группы рассмотреть равенство, приведенное в конце введения в § 2 настоящей главы. Учесть, что согласно 4.2.10 каждое $k_i > 1$ есть индекс некоторой подгруппы данной группы. Применить результат 4.4.3 к центру данной группы.

4.4.7. Учесть, что P является нормальным делителем в своем нормализаторе. Учитывая 4.1.30, рассмотреть произведение $[x]P$ для $x \in N$, имеющего порядком некоторую степень числа p.

4.4.10. Пусть P_1 и P_2 — две силовские p-подгруппы G. Рассмотреть разложение G по паре подгрупп (P_1, P_2). Для этого разложения составить равенство 4.2.27.

4.4.11. Пусть P — одна из силовских p-подгрупп группы G и N — ее нормализатор. Рассмотреть разложение G по паре подгрупп (N, P) и связанное с ним равенство 4.2.27. Учесть, что число силовских p-подгрупп в силу 4.2.10 и 4.4.10 равно индексу N в G. Используя 4.4.7, показать, что в разложении G по (N, P) равенство $x^{-1}Nx \cap P = P$ имеет место только для одного из классов NxP.

4.4.12. Использовать 4.4.5 и 4.4.11.

4.4.14. Использовать 4.4.11.

4.4.18. Рассмотреть разложение G по паре подгрупп (P, H), где P — некоторая силовская p-подгруппа G, и связанное с ним равенство 4.2.27.

4.4.19. Показать, что в рассматриваемом случае элементы из различных силовских p-подгрупп перестановочны между собою. Использовать 4.4.1. Рассмотреть множество всех элементов группы, перестановочных с элементами центра одной фиксированной силовской p-подгруппы.

4.4.20. Доказать по индукции относительно порядка группы, используя 4.3.33, 4.4.1 и 4.4.3.

4.5.14. Доказать, что каждый тройной цикл в группе S_n является коммутатором.

4.5.17. Использовать 4.4.20 и тот факт, что группа порядка p абелева.

4.5.18. Показать, что в этом случае коммутант принадлежит центру. Показать, что кроме элементов из коммутанта группа должна обладать и другими элементами четного порядка.

4.5.19. Использовать 2.2.15.

4.5.22. Использовать теорему об определителе произведения матриц.

Представить матрицу с определителем, равным единице, в виде произведений матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.6.3. Использовать 4.4.13.

4.6.5. Использовать 4.5.14 и 4.3.4.

4.6.6. Предположив разрешимость S_n при $n \geqslant 5$, взять последовательность подгрупп типа 4.6.4. Выделить в ней последний из членов H_k, содержащих все тройные циклы. Воспользовавшись 4.5.10, показать, что тогда и H_{k+1} должен был бы содержать все тройные циклы.

4.6.7. Для самóй разрешимой группы G взять последовательность подгрупп типа 4.6.4. Для подгруппы $F \subset G$ рассмотреть последовательность пересечений

$$F \cap H_1,\ F \cap H_2,\ \ldots,\ F \cap H_{m-1},\ F \cap H_m.$$

4.6.8. Использовать 4.5.20 и 4.6.4.

4.6.9. Построить для G последовательность подгрупп типа 4.6.4, исходя из соответствующих последовательностей для N и G/N. Использовать 4.5.20.

4.6.13. Использовать 2.6.24 и 4.5.12.

4.6.14. Использовать 4.5.17.

4.6.15. Использовать 4.3.7, 4.6.5, 4.6.6, 4.6.7 и 4.6.9.

4.6.18, 4.6.19. Использовать 4.4.11 и 4.6.3.

4.6.20. Использовать 4.3.17.

4.7.4. Использовать 4.6.12 и 4.6.13.

4.7.8. Используя 4.7.7, доказать по индукции относительно k, что $H_k \subset Z_{n-k}$.

4.7.9. Доказать по индукции относительно k, что $H_{n-k} \subset Z_k$.

4.7.10. Использовать 4.7.8 и 4.7.9.

4.7.14. Использовать 4.4.1.

4.7.15. 1) Использовать 4.7.12; 2) использовать 4.7.11; 3) использовать 4.7.12; 4) использовать 4.7.14 и 4.7.4.

4.7.16. Использовать 4.7.14.

4.7.21. Использовать 4.7.4.

4.8.10, 4.8.11. Использовать 4.8.8.

4.8.20. Подсчитать число элементов в каждом классе сопряженных элементов второго порядка. Использовать 4.2.19.

4.8.21. Использовать предыдущую задачу.

4.8.22. Использовать предыдущую задачу. Если φ — автоморфизм S_4 и $\varphi(12) = (\alpha\beta)$, $\varphi(13) = (\alpha\gamma)$, $\varphi(14) = (\alpha\delta)$, то рассмотреть t_u, где

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

4.8.28. Использовать 3.3.20 и 4.8.3. Найти число порождающих множеств знакопеременной группы A_4, состоящих каждое из двух элементов.

4.8.31. Использовать 4.3.29 и 4.8.18.

4.9.6. Использовать предыдущую задачу.

4.9.8. Если u не регулярная подстановка, то при некотором k степень u^k преобразует в себя хотя бы одно число.

4.9.20. Если $G_\alpha \subset G' \subset G$ и uG' — правый смежный класс G по G', то доказать, что $M = \{ug_i\alpha, ug_j\alpha, \ldots\}$, где $g_i, g_j, \ldots \in G'$ — система импримитивности.

4.9.21. Пусть $(ij_1), (ij_2), \ldots, (ij_k)$ — все транспозиции группы G, содержащие число i; H — группа, порожденная группой G_i и этими транспозициями. Доказать, что $k < n-1$ и что $H \neq G$. Использовать 3.3.19 и 4.9.20.

4.9.22. Использовать 4.9.13 и 4.9.21.

4.9.26. Если H — интранзитивный нормальный делитель транзитивной группы G, то доказать, что совокупность систем интранзитивности H является рядом импримитивности G (см. 4.9.3).

4.9.27. Использовать указание к предыдущей задаче.

4.9.34. Использовать 4.9.6.

Глава V

5.1.5. Доказать, что последние три соотношения являются следствиями предыдущих.

5.1.6. Доказать, что соотношение $a^2 = c^2$ (см. 5.1.5) не является следствием из данного множества соотношений.

5.1.18. Воспользоваться предыдущей задачей.

5.1.19. Воспользоваться предыдущей задачей.

5.1.20. Выяснить, какой вид имеют непосредственные следствия из данной совокупности соотношений.

5.1.24. Использовать 5.1.10.

5.1.27. Использовать 5.1.26.

5.2.4. Использовать 5.1.4.

5.2.7, 5.2.8. Использовать 5.1.19.

5.2.13. Использовать 5.2.9, 5.2.11 и 5.2.12.

5.2.21. Доказать, что каждое слово в группе G можно привести к виду $c^m d^n$, где m, n — целые числа.

5.2.22. Использовать 5.2.3.

5.2.23. Учесть, что если r — решение сравнения $x^p \equiv 1 \pmod q$, то остальными решениями будут $r^2, r^3, \ldots, r^{p-1}$.

5.3.4. Доказать, что множество K можно разбить на два непересекающихся равномощных подмножества K_1, K_2 так, что множество всевозможных классов, содержащих $k \in K_1$, будет свободным порождающим множеством группы $\overline{F}_K$.

5.3.8. 3) Использовать предыдущую задачу.

5.3.12. Если $K = \{a, b, \ldots\}$ — свободное порождающее множество, то и $K' = \{ab^n, b, \ldots\}$ — свободное порождающее множество при любом целом n.

5.3.13. Доказать утверждение для группы $\overline{F}_K$ из 5.3.4.

5.3.17. Использовать 5.3.15 и 5.3.16.

5.3.19. Использовать 5.3.11 и 5.3.14.

5.4.1. Построить свободную группу над K и воспользоваться 5.3.15.

5.4.3. Для доказательства некоммутативности G_2, G_3 воспользоваться 5.1.18, 4.3.35 и найти некоммутативные группы, в которых выполняются указанные соотношения.

5.4.4. Использовать указание к предыдущей задаче.

5.4.5. Использовать указание к 5.4.3.

5.4.6. Использовать 5.4.2 и 4.3.35.

5.4.7. Использовать 5.1.18 и указание к 5.4.3.

5.4.8. Использовать указание к предыдущей задаче.

5.4.10. Построить группу пар $(x^{\varepsilon_1}, y^{m_1})$.

5.4.14. Использовать 5.4.12 и 5.4.13.

5.4.15. Использовать указание к предыдущей задаче.

5.4.16. Использовать 5.4.13.

5.4.18. Использовать 5.2.18; доказать, что при любом автоморфизме элемент $(ab)^2$ переходит в себя.

5.4.20. Использовать 5.4.19, 5.2.16 и 5.2.17.

5.4.22. Использовать 5.4.21, 5.2.15 и 5.2.19.

5.4.23. Использовать 5.4.20 и 5.4.22.

5.4.24. Использовать 4.4.6, 4.4.11 и 4.4.14.

5.4.25. Если a — элемент порядка p, а b — элемент порядка q, то доказать, что все элементы a, $b^{-1}ab$, $b^{-2}ab^2$, ..., $b^{-(q-1)}ab^{q-1}$ различны. Доказать, что в G справедливы соотношения $a^{-j}ba^j = b^{r^j}$ при любом натуральном j. Использовать 4.4.5.

5.4.26. Использовать предыдущую задачу.

5.4.27. Использовать 5.4.26, 5.2.22, 5.2.23 и 4.4.14.

5.4.28. Использовать предыдущую задачу.

5.4.29. Использовать 5.4.27, 5.4.23 и 4.4.3.

5.5.20. Обозначим через s частичное преобразование $s(z) = -\frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$, а через t частичное преобразование $t(z) = z + 1$.

Доказать, что элементы s и t образуют порождающее множество G. Пусть v — произвольный элемент из G и v осуществляет преобразование $v(z) = \frac{az+b}{cz+d}\left(z \neq -\frac{d}{c}\right)$. Сначала рассмотрим случай, когда $d = 0$. Если же $d \neq 0$, то пусть сперва $|b| \geqslant |d| > 0$. Показать, что элемент $t^n v$ осуществляет частичное преобразование

$$t^n v(z) = \frac{(a+nc)z + (b+nd)}{cz+d}\left(z \neq -\frac{d}{c}\right)$$

и что можно рассматривать лишь случай, когда $0 \leqslant |b| \leqslant d$. Если v удовлетворяет новым условиям, то рассмотреть элемент sv. Далее, применяя умножение элемента v слева на соответствующие степени элемента t и на элемент s, показать, что v выражается через элементы s и t. Рассмотреть элементы $u = ts$ и s. Доказать, что G порождается элементами u и s. Показать, что $u^3 = s^2 = e$ и, значит, всякий элемент из G может быть записан в виде произведения, в котором чередуются элемент s и элементы u и u^2. Допустить, что для некоторого элемента из G эта запись не однозначна. Показать, что в этом случае имеет место соотношение вида

$su^{\alpha_1}su^{\alpha_2} \ldots su^{\alpha_k} = e$, где все α_i принимают значения 1 и 2. Проведя индукцию по k, получить противоречие.

5.5.24. Рассмотреть совокупность групп $\overline{G}_\xi$ $(\xi \in \Gamma)$, изоморфных с G_ξ и не имеющих попарно общих элементов, кроме e, который является единицей каждой из них. Рассмотреть совокупность таких слов $x_1x_2 \ldots x_n$ над $M = \bigcup\limits_{\xi \in \Gamma} \overline{G}_\xi$, у которых никакие два соседних x_i и x_{i+1} не принадлежат одной и той же группе $\overline{G}_\alpha$. В множестве M рассмотреть действие, состоящее в приписывании двух слов над M с последующим перемножением множителей из одной и той же $\overline{G}_\alpha$, если таковые окажутся.

5.6.5. 4) Воспользоваться 4.4.14.

5.6.26. Воспользоваться 5.6.25.

5.6.28. Воспользоваться 5.6.26.

5.6.29. Воспользоваться 5.6.14.

5.6.31. Доказать, что существует гомоморфизм G на прямое произведение n бесконечных циклических групп (см. 5.6.29).

5.6.32. Сравнить мощности (гл. I, § 2) множеств G и множества всех последовательностей $(a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ $(a_i \in G_i)$, где лишь конечное число a_i отлично от единиц групп G_i.

Глава VI

6.1.9. Рассмотреть совокупность G'_p всех элементов G, порядки которых являются степенями данного простого числа p, и доказать, что G'_p — подгруппа, причем, если $p_1 \neq p_2$, то $G'_{p_1} \cap G'_{p_2} = e$.

6.1.27. Воспользоваться 6.1.26.

6.1.28. Воспользоваться 6.1.24 и 6.1.27.

6.2.6. Пусть H — подгруппа G, рассматриваемая в предыдущей задаче. Доказать, что $[H, a] = [a] \times H = G$.

6.2.7. Использовать 6.1.9 и 6.2.6.

6.2.9. Предварительно решить задачу для примарной конечной группы.

6.2.13. Использовать 6.2.12.

6.3.1. Доказательство провести по индукции относительно числа порождающих.

6.3.2. Доказательство провести по индукции относительно числа $n = |n_1| + \ldots + |n_k|$.

6.3.4. С помощью задачи 6.3.2 найти порождающее множество $\{g_1, \ldots, g_k\}$ группы A такое, что порядки $g_1, g_2, \ldots, g_k$ не убывают, и такое, что не существует порождающего множества $\{g'_1, \ldots, g'_k\}$, для которого порядок g_1 равен порядку g'_1 и т. д., но порядок g_i больше порядка g'_i для некоторого $i = 1, 2, \ldots, k$.

6.3.7. Использовать 6.2.13.

6.3.8. 6) Выбрать в качестве нового порождающего множества $a_1a_2^2a_3^2$; a_2; a_3; 7) выбрать в качестве нового порождающего множества a_1a_2; a_2; 8) выбрать в качестве нового порождающего множества $a_1a_2^3a_3^3$; a_2; a_3; 9) выбрать в качестве нового порождающего множества $a_1a_2a_3^{-1}$; a_2; a_3.

6.4.4. Рассмотреть совокупность, составленную из всех элементов, входящих в максимальную линейно независимую совокупность A, и представителей всех классов, входящих в максимальную линейно независимую совокупность G/A.

6.4.20. Воспользоваться 6.4.15.

6.4.21. Рассмотреть множество H всех элементов, линейно зависящих от элементов из M, и доказать, что H — сервантная подгруппа G. Воспользоваться результатом задачи 6.4.20.

6.4.25. Воспользоваться 6.4.23 и 6.4.24.

6.4.26. Воспользоваться 6.4.21 и 6.4.25.

Глава VII

7.1.18. Рассмотреть множество $A' = A \bigcup z$ $(z \overline{\in} A)$. Показать, что A изоморфно отображается в полугруппу всех преобразований A', для чего рассмотреть отображение φ такое, что

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} z, & a_\alpha, & a_\beta, & \ldots, & a_\xi, & \ldots \\ a, & aa_\alpha, & aa_\beta, & \ldots, & aa_\xi, & \ldots \end{pmatrix} \qquad (a \in A).$$

7.1.20. Использовать представление, данное в указании к 7.1.18.

7.1.28. Рассмотреть следующее отображение полугруппы A в полугруппу C: пусть a_0 — произвольный фиксированный элемент полугруппы A; положим

$$\chi_{a_0}(a) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad aa_0 \neq a_0; \\ 1, & \text{если} \quad aa_0 = a_0 \end{cases} \qquad (a \in A).$$

Доказать, что при всяком $a_0 \in A$ отображение χ_{a_0} есть гомоморфизм.

7.1.29. Воспользоваться предыдущей задачей.

7.2.2. Использовать предыдущую задачу.

7.2.10. Рассмотреть подгруппы $H_1 = \{(a^{9\alpha}, b^{\beta})\}$, $H_2 = \{(a^{3\alpha}, b^{3\beta})\}$, где α, β — любые целые числа.

7.2.13. Если $H_2 = a^{-1}H_1a$, то рассмотреть отображение ψ множества смежных классов по подгруппе H_1 в множество смежных классов по подгруппе H_2, определенное равенством $\psi(xH_1) = xaH_2$.

7.2.14. Пусть ψ — взаимно однозначное отображение множества правых смежных классов по подгруппе H_1 на множество правых смежных классов по подгруппе H_2, удовлетворяющее условию $\psi(u_g^{H_1}(xH_1)) = u_g^{H_2}(\psi(xH_1))$. Доказать, что если $\psi(H_1) = aH_2$, то $\psi(xH_1) = xaH_2$ и $H_2 = a^{-1}H_1a$. Для доказательства использовать тот факт, что $gH_1 = H_1$ тогда и только тогда, когда $g \in H_1$.

7.2.17. Использовать 7.2.15.

7.2.21. Использовать предыдущую задачу.

7.2.22. Использовать 7.2.21.

7.2.23. Использовать 7.2.12.

7.2.27. Использовать 7.2.13, 7.2.14 и доказать, что каждое изоморфное транзитивное представление группы S_4 по подгруппе четвертого порядка несущественно отличается от одного из указанных в 7.2.13.

7.2.28. Использовать 7.2.14.

7.2.29. Использовать 7.2.13, 7.2.14, 7.2.27 и 7.2.28. Доказать, что каждое изоморфное транзитивное представление группы S_4 по под-

группе четвертого порядка несущественно отличается от одного из указанных в 7.2.27.

7.2.31. 1) Рассмотреть отображение ω множества правых смежных классов по подгруппе H_1 в множество правых смежных классов по подгруппе H_2, определенное равенством $\omega(gH_1) = \psi(g)H_2$.

2) Рассмотреть отображение ξ образа представления φ_{H_1} в образ представления φ_{H_2}, определенное равенством $\xi(u_g^{H_1}) = u_{\psi(g)}^{H_2}$.

7.2.33. Пусть ξ — изоморфизм образов представлений φ_{H_1} и φ_{H_2}, а ω — взаимно однозначное соответствие между правыми смежными классами по подгруппам H_1 и H_2. Если α — автоморфизм группы G, определенный изоморфизмом ξ (см. 7.2.32), и если $\omega(H_1) = xH_2$, то доказать, что $\alpha(H_1) = xH_2x^{-1}$. Вывести отсюда, что искомый автоморфизм ψ определяется равенством $\psi(g) = x^{-1}\alpha(g)x$.

7.3.17. Воспользоваться 7.3.16.

7.3.18. Пусть $T(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) & 0 \\ A(x) & T_2(x) \end{pmatrix}$, где $T_1(x)$ — матрица порядка m_1, а $T_2(x)$ — матрица порядка m_2, и пусть G — группа порядка n. Рассмотреть матрицу $P = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 \\ F & E_{m_2} \end{pmatrix}$, где E_{m_i} — единичные матрицы порядка m_i $(i = 1, 2)$, а $F = \frac{1}{n} \sum\limits_{x \in G} A(x) T_1^{-1}(x)$.

7.3.19. Воспользоваться предыдущей задачей.

7.3.20, 7.3.21. Воспользоваться 7.3.17.

7.4.11, 7.4.12. Воспользоваться 7.4.10.

7.4.13—7.4.16. Воспользоваться 7.4.6 и 7.4.10.

7.4.18—7.4.20. Воспользоваться 7.4.6, 7.4.10 и 7.4.17.

7.4.21—7.4.24, 7.4.28, 7.4.34. Воспользоваться 7.4.10 и 7.4.17.

7.5.7, 7.5.8. Воспользоваться 7.3.21.

7.5.10. Воспользоваться 7.4.10 и 7.5.7.

7.5.14. Воспользоваться 7.5.13.

Глава VIII

8.1.1. 3) Воспользоваться неравенством Коши:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big).$$

8.1.16. Рассмотреть совокупность многочленов с рациональными коэффициентами и воспользоваться результатом задачи 1.2.21.

8.1.17. Ввести в M_T метрику следующим образом:

$$\rho(x, y) = \sup |x(t) - y(t)| \qquad (x, y \in M_T).$$

8.1.20. Рассмотреть отображение

$$\rho'(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y), & \text{если } \rho(x, y) \leqslant 1; \\ 1, & \text{если } \rho(x, y) > 1. \end{cases}$$

8.2.6. Воспользоваться 8.2.5.

8.2.9. Воспользоваться 8.2.7.

8.2.16. Предварительно доказать, что множество $\{\rho(f(x), g(x))\}$ $(x \in M)$ ограничено в метрическом пространстве вещественных чисел (8.1.1, 2)). Затем воспользоваться известной теоремой о существовании точной верхней границы ограниченного сверху множества и тем, что эта граница достигается.

8.2.18. Воспользоваться 8.2.7 и 8.2.16.

8.2.19. Воспользоваться 8.2.15.

8.2.23. Воспользоваться 8.1.20.

8.3.21. Воспользоваться 8.3.18.

8.3.28, 8.3.29. Воспользоваться 8.3.19.

8.3.30. Воспользоваться 8.3.21.

8.4.5. Воспользоваться 8.3.28.

8.4.11. Пусть α — иррациональное число; из теории чисел известно, что каковы бы ни были положительное число ε и вещественное число d, всегда найдутся такие целые числа m и n, что $|m\alpha - d - n| < \varepsilon$. Воспользоваться этим результатом для решения второй части задачи.

8.4.12, 8.4.13. Воспользоваться 8.3.19.

8.4.17. Пусть $c \in U \cap H$. Доказать, что существует такое открытое множество V, содержащее e, что $cV \subset U$. Пусть $a \in \overline{H}$. Доказать, что существует $b \in H$ такое, что $cba^{-1} \in cV \subset U$. Отсюда получить, что $cba^{-1} \in H$, и показать, что $a \in H$.

8.4.19. Воспользоваться 8.3.21, 8.3.19 и 8.4.6.

8.4.20. Воспользоваться 8.4.19.

8.4.21. Воспользоваться 8.4.6, 8.3.25 и 8.3.27, 8.3.29.

8.4.23. Воспользоваться 8.4.21, 8.4.20, 8.3.28 и 8.3.29.

8.4.25. Воспользоваться 8.3.28 и 8.3.29.

8.4.28. Воспользоваться 8.4.5, 8.4.7 и 8.3.19.

8.4.29. Воспользоваться предыдущей задачей и задачей 8.4.13.

8.4.35. Ввести на плоскости систему координат и воспользоваться известной теоремой о том, что формулы, выражающие аффинное преобразование в координатах, линейны.

8.4.36. Воспользоваться 8.4.19 и 8.3.28.

8.4.38. Рассмотреть отображение g, являющееся результатом последовательного применения отображений f и ψ^{-1}, где f — естественное отображение G на множество правых классов G/A_α. Показать, что f открыто. Показать, что из непрерывности g следует непрерывность ψ^{-1}.

8.4.39. Воспользоваться 8.2.23.

8.5.7. Рассмотреть отношение ρ такое, что $x \sim y\,(\rho)$ тогда и только тогда, когда $x^{-1}y \in H$, и доказать, что ρ — двусторонне стабильная упорядоченность.

8.5.12. Использовать 8.5.5.

8.5.13, 8.5.14. Использовать 8.5.7.

8.5.26. Использовать 8.5.1, 8.5.6 и 8.5.7.

ОТВЕТЫ

Глава I

1.1.1. $1 \in M_1$; $-2, 0, 1 \in M_2$; $-2, 0, 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{7} \in M_3$; $1, \frac{3}{5}, \sqrt{2}, \pi, \frac{1}{7} \in M_4$; $0, 1 \in M_5$; $\frac{3}{5}, \sqrt{2}, -2, \pi, \frac{1}{7}, i, -i, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i, 2 + i \in M_6$. **1.1.2.** x, z. **1.1.3.** Три элемента. **1.1.4.** $M_1 \subset M_2 \subset M_3$; $M_1 \subset M_4$; $M_5 \subset M_2 \subset M_3$. **1.1.6.** 0. **1.1.7.** 1) Все вещественные числа; 2) $\varnothing$. **1.1.8.** 1) Множество всех натуральных чисел; 2) $\varnothing$; 3) M_k, где k — наименьшее общее кратное чисел n и m; 4) множество всех натуральных чисел, отличных от 1. **1.1.10.** 1) M; 2) $\varnothing$. **1.1.11.** 1) A; 2) M; 3) $\varnothing$; 4) $\tilde{A} \cap \tilde{B}$; 5) $\tilde{A} \cup \tilde{B}$; 6) A; 7) $A \cup B$; 8) $A \cup B$; 9) $\varnothing$; 10) M. **1.1.12.** 2^4; 14. **1.1.13.** Имеют место три требуемых разбиения: $M_0 \cup M_2 \cup M_3$; $M_4 \cup M_5$; $M_6 \cup M_7 \cup M_1 \cup M_0 \cup M_3$. **1.1.14.** Образует разбиение. **1.1.15.** $\varnothing$. **1.1.17.** 243. **1.1.18.** $(-1, a, a)$; $(-1, b, a)$; $(-1, c, a)$; $(1, a, a)$; $(1, b, a)$; $(1, c, a)$. **1.1.19.** $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$. **1.1.20.** Пусть m — число элементов M. При m четном оба класса должны состоять из $\frac{m}{2}$ элементов каждый. При m нечетном один класс состоит из $\frac{m+1}{2}$ элементов, а другой из $\frac{m-1}{2}$ элементов. **1.2.1.** Общее число отображений m^n; отображения A на B существуют при $n \geqslant m$, взаимно однозначные отображения существуют при $n \leqslant m$; взаимно однозначные отображения A на B существуют при $n = m$, и число их равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$. **1.2.3.** Отображений указанного типа C на A нет; отображение указанного типа C на B существует. **1.2.4.** 175. **1.2.5.** φ взаимно однозначно; $\varphi(M)$ состоит из всех натуральных чисел, за исключением n чисел: $n, n+1, \ldots, 2n-1$. **1.2.6.** φ взаимно однозначно; $\varphi(N) \neq N$, т. е. φ является отображением N в N, но не на N. **1.2.7.** Необходимо и достаточно, чтобы $h(x)$ не принимала значений, равных 0, ни при каком значении x. **1.2.8.** Отображение взаимно однозначно, оно не является отображением множества на себя. Неподвижными точками отображения являются все равносторонние треугольники. **1.2.18.** Множество $\bigcup_k M_k$ конечно тогда и только тогда, когда все M_k конечны и существует такое натуральное число n, что каждое M_i совпадает с одним из $M_1, M_2, \ldots, M_n$. **1.2.31.** φ должно быть взаимно однозначным, а $N \setminus \varphi N'$ бесконеч-

ным. **1.3.3.** 1) $\mathrm{pr}_1\rho_k=\{k+1, k+2, \ldots\}$, если $k\neq 0$; $\mathrm{pr}_1\rho_0=N$; 2) $\mathrm{pr}_2\rho_k=\{1, 2, \ldots\}$; 3) $n\sim m\,(\sigma)$ тогда и только тогда, когда $n\geqslant m$; 4) $n\sim m\,(\sigma^*)$ тогда и только тогда, когда $m<n$; 5) $n\sim m\,(\tau)$ тогда и только тогда, когда $n\leqslant m$; 6) $n\sim m\,(\tau^*)$ тогда и только тогда, когда $m>n$. **1.3.5.** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\sim(b_1, b_2, \ldots, b_n)\,(\tau_1)$, если $a_1=b_1$, $a_2=a_3=\ldots=a_n=0$; $\tau_2=\Delta$; $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\sim(b_1, b_2, \ldots \ldots, b_n)\,(\tau_3)$, если $a_1=b_1$, $a_2=a_3=\ldots=a_n=b_2=b_3=\ldots=b_n=0$. **1.3.6.** 1) Отношение ρ_1 симметрично; 2) отношение ρ_2 рефлексивно, транзитивно и антисимметрично; 3) отношение ρ_3 антисимметрично; 4) отношение ρ_4 транзитивно, антисимметрично; 5) отношение ρ_5 рефлексивно, антисимметрично и транзитивно; 6) отношение σ_0 рефлексивно, транзитивно, симметрично, антисимметрично. Отношение σ_k при $k\neq 0$ обладает только свойством антисимметричности. **1.3.11.** Вещественные числа a и b находятся в отношении, являющемся транзитивным замыканием отношения ρ, тогда и только тогда, когда $b\geqslant a$. Транзитивное замыкание $\rho\bigcup\rho^*$ равно ω_R. **1.3.12.** 1) $z_1\sim z_2\,(\rho_1\bigcap\rho_1^*)$ тогда и только тогда, когда $|z_1|=|z_2|$; 2) ω_K; 3) Δ; 4) ω_K. **1.3.13.** $\rho'=\rho\bigcup\rho^*$. **1.3.14.** $\rho'=\rho\bigcup\Delta$. **1.3.15.** ρ_1—упорядоченность; ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 не являются упорядоченностями. **1.3.16.** ρ_1 — упорядоченность, ρ_2 — эквивалентность, ρ_3 не является ни упорядоченностью, ни эквивалентностью, ρ_4 — упорядоченность. **1.3.20.** Все конечные линейно упорядоченные множества и бесконечные линейно упорядоченные множества следующих трех видов:

$$\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<\ldots,\quad \alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_n>\ldots,$$

$$\ldots<\alpha_{-n}<\ldots<\alpha_{-2}<\alpha_{-1}<\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<\ldots$$

1.3.21. 1) Не является вполне упорядоченным; 2) вполне упорядочено; 3) не является вполне упорядоченным; 4) не является вполне упорядоченным; 5) не является вполне упорядоченным; 6) вполне упорядочено; 7) не является вполне упорядоченным. **1.3.22.** M — конечное множество. **1.4.1.** $\rho^2=\rho$; $\rho\sigma=\sigma$; σ^2 — такое бинарное отношение, что $n\sim m\,(\sigma^2)$ при $n-m<1$; $\tau^2=\omega$; $\rho\lambda_k$ — такое бинарное отношение, что $n\sim m\,(\rho\lambda_k)$, если n — делитель числа $m+k$ или делитель числа $m-k$; $\lambda_k\rho$ — такое бинарное отношение, что m делится на $n-k$ или на $n+k$; $\sigma\lambda_k=\lambda_k\sigma$ — такое бинарное отношение, что $n\sim m\,(\sigma\lambda_k)$, если $n<m+k$; $\lambda_k\lambda_l$ — такое бинарное отношение, что $n\sim m\,(\lambda_k\lambda_l)$, если $|n-m|=k+l$ или $|n-m|=|k-l|$. **1.4.6.** $\rho R=Z$; $R\rho=Z$; $\sigma R=R$; $R\tau=R$; $\rho C=C$; $C\sigma=Z$; $C\tau=C$; ρP есть множество всех комплексных чисел z таких, что $|z|=1$; $P\sigma$ — множество всех чисел вида bi, где b — положительное вещественное число; $P\tau=\{-i\}$. **1.4.9.** $\omega\,(\rho_1\bigcap\rho_2)=\{(a, a), (b, a)\}$; $\omega\rho_1\bigcap\omega\rho_2=\omega$. **1.4.10.** $\omega^2=\omega$; $\omega\bar\Delta=\bar\Delta\omega=\omega$, если Ω содержит более одного элемента; $\omega\bar\Delta=\bar\Delta\omega=\varnothing$, если Ω состоит из одного элемента; $\bar\Delta^2=\omega$, если Ω содержит не менее трех элементов; $\bar\Delta^2=\Delta$, если Ω состоит из двух элементов; $\bar\Delta^2=\varnothing$, если Ω состоит из одного элемента. **1.4.11.** $\rho_i\rho_j=\omega$, если $i\neq j$ и $\rho_i^2=\rho_i$. **1.4.12.** $\rho^2=\rho$; $\rho\bar\rho$ — такое отношение, что $P\sim Q\,(\rho\bar\rho)$, если $Q\neq M$, $\bar\rho\rho$ — такое отно-

шение, что $P \sim Q\,(\bar{\rho}\rho)$, если $P \neq \varnothing$; $\rho\rho^* = \omega$; $\bar{\rho}\rho^* = \bar{\rho}$. **1.4.13.** $\rho\Delta = \Delta\rho = \rho$; $\omega\rho$ — такое отношение, что $\alpha \sim \beta\,(\omega\rho)$, если $\beta \in \mathrm{pr}_2\,\rho$; $\rho\omega$ — такое отношение, что $\alpha \sim \beta\,(\rho\omega)$, если $\alpha \in \mathrm{pr}_1\,\rho$. **1.4.14.** 1) $\mathrm{pr}_2\rho = \Omega$; 2) $\mathrm{pr}_1\,\rho = \Omega$; 3) $\mathrm{pr}_1\,\rho = \mathrm{pr}_2\,\rho = \Omega$; 4) $\rho \neq \varnothing$, 5) $\alpha\rho \cap \beta\rho \neq \varnothing$ при любых $\alpha, \beta \in \Omega$. **1.4.15.** $\sigma_1^2 = \sigma_1$; $\sigma_2^2 = \sigma_2$; $\sigma_3^2 = \omega$; $f(x) \sim \varphi(x)\,(\sigma_1\sigma_2)$ тогда и только тогда, когда $f(a) \leqslant \varphi(a)$ и $f(b) \leqslant \varphi(b)$; $\sigma_2\sigma_3$ — такое отношение, что $f(x) \sim \varphi(x)\,(\sigma_2\sigma_3)$, если $f(a) \neq \varphi(a)$ и $f(b) \neq \varphi(b)$; $\sigma_3\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3$. **1.4.20.** Из рефлексивности ρ_1 и ρ_2 всегда следует рефлексивность $\rho_1\rho_2$. Для транзитивности, симметричности и антисимметричности соответствующий вопрос получает отрицательный ответ. **1.4.22.** $\rho_1\rho_2$ является линейной упорядоченностью лишь при $\rho_1 = \rho_2$. **1.4.24.** ρ^2 и ρ^3 рефлексивны, симметричны и транзитивны; σ^2 и σ^3 рефлексивны, антисимметричны и транзитивны; $\rho\sigma$; $\sigma\rho$; $\sigma\rho\sigma$; $\rho\sigma\rho$ рефлексивны.

Глава II

2.1.1. 45.

2.1.2.

	1	2	3	4	5
1	—	—	—	—	—
2	1	—	—	—	—
3	2	1	—	—	—
4	3	2	1	—	—
5	4	3	2	1	—

2.1.3. x_2, x_3, x_4, x_6.

2.1.4.

	z_1	z_2	z_3	z_4
z_1	—	—	—	—
z_2	—	z_1	.	.
z_3	—	.	z_1	.
z_4	—	.	.	z_1

На местах, где стоят точки, можно произвольно ставить z_1 или черточку —. **2.1.5.** 1) В N результат действия определен для (a, b), если a и b оба четные или оба нечетные; 2) в N результат действия определен для любой пары (a, b); 3) в N результат действия определен для любой пары (a, b), в которой $a \neq b$. **2.1.8.** M и M_1 изоморфны; M_2 неизоморфно ни с M, ни с M_1. **2.1.12.** 5. **2.1.13.**. Два подмножества $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и $\{\beta, \gamma, \varepsilon\}$. **2.1.15.** M изоморфно со всяким своим бесконечным подмножеством. **2.2.1.—2.2.3, 2.2.6.** См. таблицы на стр. 241—243.

2.2.7. Неограниченная применимость, ассоциативность. Имеются единица действия и нуль. Обратными элементами обладают неособенные матрицы. **2.2.8.** Неограниченная применимость при любых p, q, r; коммутативность при $p = q$; ассоциативность при $p = q = 1$ и $p = q = 0$; обратимость слева при $p \neq 0$; обратимость справа при $q \neq 0$; сократимость слева при $q \neq 0$; сократимость справа при $p \neq 0$. **2.2.9.** Неограниченная применимость, ассоциативность. Имеются единица и нуль. **2.2.10.** Неограниченная применимость, коммутативность, обратимость слева, обратимость справа, сократимость слева, сократимость справа. Единицы нет. Нуля нет. Все элементы идемпотентны. **2.2.11.** Неограниченная применимость, обратимость слева, обратимость справа, сократимость слева, сократимость справа. **2.2.12.** Действие совершается по правилу сложения векторов. Выполняются ассоциативность, обратимость слева,

2. 2. 1.

Действие	Неограниченная применимость	Коммутативность	Ассоциативность	Обратимость слева	Обратимость справа	Сократимость слева	Сократимость справа	Наличие единицы действия	Наличие нуля действия
Сложение	да	да	да	да	да	да	да	да	нет
Умножение	да	да	да	нет	нет	нет	нет	да	да
Вычитание	да	нет	нет	да	да	да	да	нет	нет
Деление	нет	нет	нет	нет	нет	нет	да	нет	нет

2. 2. 2.

Множества	Действие	Неограниченная применимость	Коммутативность	Ассоциативность	Обратимость слева	Обратимость справа	Сократимость слева	Сократимость справа	Наличие единицы действия	Наличие нуля действия
Множество всех натуральных чисел	Сложение	да	да	да	нет	нет	да	да	нет	нет
	Умножение	да	да	да	нет	нет	да	да	да	нет
	Вычитание	нет	нет	нет	да	нет	да	да	нет	нет
	Деление	нет	нет	нет	да	нет	да	да	нет	нет

Множества	Действие	Неограниченная применимость	Коммутативность	Ассоциативность	Обратимость слева	Обратимость справа	Сократимость слева	Сократимость справа	Наличие единицы действия	Наличие нуля действия
Множество всех целых чисел	Сложение	да	да	да	да	да	да	да	да	нет
	Умножение	да	да	да	нет	нет	нет	нет	да	да
	Вычитание	да	нет	нет	да	да	да	да	нет	нет
	Деление	нет	нет	нет	нет	нет	нет	да	нет	нет
Множество всех рациональных чисел	Сложение	да	да	да	да	да	да	да	да	нет
	Умножение	да	да	да	нет	нет	нет	нет	да	да
	Вычитание	да	нет	нет	да	да	да	да	нет	нет
	Деление	нет	нет	нет	нет	нет	нет	да	нет	нет
Множество всех положительных чисел	Сложение	да	да	да	нет	нет	да	да	нет	нет
	Умножение	да	да	да	да	да	да	да	да	нет
	Вычитание	нет	нет	нет	да	нет	ца	да	нет	нет
	Деление	да	нет	нет	да	да	да	да	нет	нет
Множество всех отрицательных чисел	Сложение	да	да	да	нет	нет	да	да	нет	нет
	Умножение	нет	да	да	нет	нет	да	да	нет	нет
	Вычитание	нет	нет	нет	ца	нет	да	ца	нет	нет
	Деление	нет	да	да	нет	нет	да	да	нет	нет

2. 2. 3.

Действие	Неограниченная применимость	Коммутативность	Ассоциативность	Обратимость слева	Обратимость справа	Сократимость слева	Сократимость справа	Наличие единицы	Наличие нуля
Сложение	да	да	да	да	да	да	да	да	нет
Умножение	да	да	да	нет	нет	нет	нет	да	да
Вычитание	да	нет	нет	да	да	да	да	нет	нет
Деление	нет	нет	нет	нет	нет	нет	да	нет	нет

2. 2. 6.

Действие	Неограниченная применимость	Коммутативность	Ассоциативность	Обратимость слева	Обратимость справа	Сократимость слева	Сократимость справа	Наличие левых единиц	Наличие правых единиц	Наличие двусторонних единиц	Наличие левых нулей	Наличие правых нулей	Наличие двусторонних нулей
1	да	да	да	нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	да	да	да
2	да	да	да	нет	нет	нет	нет	да	да	да	нет	нет	нет
3	да	нет	нет	нет	нет	да	да	нет	да	нет	да	нет	нет
4	нет	да	нет	нет	нет	да	да	нет	нет	нет	нет	нет	нет

1) Все идемпотенты; 2) все идемпотенты; 3) 1; 4) 2.

обратимость справа, сократимость слева, сократимость справа. **2.2.13.** 1) Заполнены все клетки таблицы; 2) таблица симметрична относительно диагонали; 3) в каждом столбце встречаются все элементы; 4) в каждой строке встречаются все элементы; 5) ни в одном из столбцов ни один из элементов не встречается более одного раза; 6) ни в одной из строк ни один из элементов не встречается более одного раза. **2.2.14.** Для коммутативности, ассоциативности, сократимости слева, сократимости справа. **2.2.16.** Действие объединения обладает свойствами неограниченной применимости, коммутативности, ассоциативности. Действие пересечения обладает теми же свойствами. **2.2.17.** Всеми основными свойствами, кроме ассоциативности. **2.3.1.** $RR=RZ=ZR=R$; $ZZ=Z$; $PP=P$; $PN=N$; $NN=P$. **2.3.2.** $(MM)M=\{a\}$, $M(MM)=\{a, b\}$. **2.3.7.** A — идеал; B замкнуто, но не является идеалом; C_1 замкнуто; C_n при $n>1$ не замкнуто; D_n — идеал; $C_n \cap D_m$ пусто при $n<m$, не замкнуто при $n \geqslant m$, $n \neq 1$, замкнуто, но не является идеалом при $n=m=1$. **2.3.8.** Множество всех вещественных чисел замкнуто, но не является идеалом; множество всех чисто мнимых чисел не замкнуто. **2.3.9.** Множество всех неособенных матриц замкнуто, но не является идеалом; множество всех особенных матриц — идеал. **2.3.16.** T_1 и T_2 являются идеалами; T_1T_2 не является идеалом. **2.3.17.** $\{z\}$ замкнуто тогда и только тогда, когда z идемпотентен; $\{z\}$ — левый идеал, когда z есть правый нуль M; $\{z\}$ — правый идеал, когда z есть левый нуль M; $\{z\}$ — двусторонний идеал, когда z есть нуль M. **2.3.18.** $n+1$. **2.4.1.** φ_1 и φ_3 — гомоморфизмы; φ_2 и φ_4 гомоморфизмами не являются. **2.4.2.** 1) Гомоморфизм φ_0, отображающий все числа из R в 0; 2) гомоморфизм φ_1, определенный равенствами $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_1(r)=1$ $(r \neq 0)$; 3) остальные гомоморфизмы устроены следующим образом. Пусть множество R' состоит из -1 и всех простых натуральных чисел, P — произвольное непустое подмножество R'. Гомоморфизм φ_P определен равенствами $\varphi_P(0)=0$, $\varphi_P(1)=1$, $\varphi_P(r)=(-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_n}$, где $r=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n} \times$ $\times\, q_1^{l_1}q_2^{l_2}\ldots q_m^{l_m}$ $(p_1, \ldots, p_n \in P$, $q_1, \ldots, q_m \in R' \setminus P$; $k_1, \ldots, k_n$, $l_1 \ldots l_m$ — целые числа). **2.4.3.** φ_1 и φ_3 — гомоморфизмы; φ_2 гомоморфизмом не является. **2.4.7.** Для любого $k=1, 2, 3, \ldots$ отображение φ_k, согласно которому $\varphi_k(5^n)=5^{kn}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, является гомоморфизмом. Других гомоморфизмов нет. Все φ_k являются изоморфизмами. **2.4.10.** Необходимо и достаточно, чтобы среди элементов M_0 имелся хотя бы один идемпотент. **2.4.12.** $a \sim b\ (\sigma)$, но не имеет места $aa \sim bb\ (\sigma)$. **2.4.13.** 1) φ_1 — гомоморфизм, каждый класс соответствующего разбиения состоит из всех полиномов с одним и тем же старшим коэффициентом; 2) φ_2 — гомоморфизм, каждый класс соответствующего разбиения состоит из всех полиномов с одним и тем же старшим коэффициентом; 3) φ_3 — гомоморфизм, каждый класс соответствующего разбиения состоит из всех полиномов с одинаковыми значениями при $x=1$; 4) φ_4 гомоморфизмом не является; 5) φ_5 — гомоморфизм, каждый класс соответствующего разбиения состоит из всех полиномов с одинаковыми по модулю свободными членами; 6) φ_6 — гомоморфизм: при $c \neq \pm 1$ каждый

класс соответствующего разбиения состоит из всех полиномов одной и той же степени, при $c=1$ имеется один класс, содержащий все полиномы, при $c=-1$ имеется два класса — один состоит из всех полиномов четной степени и второй из всех полиномов нечетной степени.

2.4.15.

	R^+	R^-	R^0
R^+	R^+	R^-	R^0
R^-	R^-	R^+	R^0
R^0	R^0	R^0	R^0

2.4.17.

M/T_1	1	T_1
1	1	T_1
T_1	T_1	T_1

M/T_2	1	2	T_2
1	1	2	T_2
2	2	T_2	T_2
T_2	T_2	T_2	T_2

M/T_3	1	2	4	T_3
1	1	2	4	T_3
2	2	4	T_3	T_3
4	4	T_3	T_3	T_3
T_3	T_3	T_3	T_3	T_3

2.4.18. φ является изоморфизмом лишь при тождественной эквивалентности ρ. **2.4.21.** Всякая эквивалентность, в которой $a \sim b$, и всякая эквивалентность, в которой ни a ни b не эквивалентны ни с какими другими отличными от них самих элементами. Всего 7. **2.4.22.** 5. **2.5.3.** Множество, состоящее из всех простых чисел и числа 1. **2.5.4.** $[x]$ — множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где n — любое натуральное число; $[x, t]$ — множество всех матриц, имеющих один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 2^k & 2^k n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где k и n — любые натуральные числа; $[y, z]$ — множество всех матриц, имеющих один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 2^l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^l \end{pmatrix},$$

где k и l — любые натуральные числа; $[y, t]$ — множество всех матриц, имеющих один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где n — любое натуральное число. **2.5.12.** Девять подполугрупп, среди них пять идеалов. **2.5.13.** $(1, p)$, где p — простое число, и $(2, 1)$. **2.5.15.** $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$. Левым идеалом является всякое

множество, содержащее 0 и такое, что вместе с a_k оно содержит всякий элемент b_{ik}. Правым идеалом является всякое множество, содержащее 0 и такое, что вместе с a_k оно содержит и всякий элемент b_{ki}. Двусторонним идеалом является всякое множество, содержащее 0 и такое, что вместе с a_k оно содержит и всякие элементы b_{ik} и b_{ki}. **2.5.17.** Регулярная полугруппа, в которой регулярно сопряжены всякие два элемента. **2.5.20.** Нормальное подмножество, являющееся подполугруппой. **2.5.21.** Если $A=[x]$, то помимо четырех подмножеств, состоящих из одного элемента каждое, нормальными подмножествами являются

$$\{x,\ x^3\},\ \{x^2,\ x^4\},\ \{x^3,\ x^4\},\ \{x^2,\ x^3,\ x^4\},\ \{x,\ x^2,\ x^3,\ x^4\}.$$

2.6.3. Среди указанных множеств группами являются лишь множества: второе, четвертое, пятое и шестое. **2.6.4.** M есть множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (a \neq 0).$$

2.6.6. Порядки соответственно: два, бесконечный, четыре, бесконечный, бесконечный. **2.6.11.** 8. **2.6.12.** 16. **2.6.24.** 1) Единичная группа; 2) циклическая группа, порядок которой есть простое число; 3) циклическая группа, порядок которой есть квадрат простого числа. **2.6.25.** 1) $\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$; 2) $\left\{1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$; 3) $\left\{1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ i,\ -i,\ -1\right\}$; 4) $\{2^{4k},\ 2^{4k+1}i,\ -2^{4k+2},\ -2^{4k+3}i\}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$; 5) $\{(-1)^n 2^k 5^n\}$ $(k,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$; 6) $\{1,\ -1\}$, $\{1\}$, $\{2^{4k},\ -2^{4k+2}\}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$, $\{(-1)^n 2^k 5^n\}$ $(k,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

2.6.29. Группа должна быть периодической. **2.6.33.** В коммутативных группах. **2.6.38.** H_2 не является нормальным делителем G. **2.6.39.** $\{1\}$, $\{1,\ -1\}$, $\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$, $\{1,\ -1,\ j,\ -j\}$, $\{1,\ -1,\ k,\ -k\}$.

Глава III

3.1.2.

$$uw=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 1 & 7 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad wu=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 2 & 8 & 3 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$v^2u=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 1 & 2 & 2 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad uw^3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 7 & 8 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$uvw=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 8 & 7 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3.1.3. Типы элементов u, v, uv, vu соответственно равны (1,3); (2,2); (3,1); (2,1). **3.1.4.** 1) Неограниченной применимостью, ассоциативностью; 2) неограниченной применимостью, ассоциативностью; 3) неограниченной применимостью, ассоциативностью, сократимостью слева и справа; 4) неограниченной применимостью, ассоциативностью, сократимостью слева и справа, обратимостью слева и справа; 5) всеми семью свойствами; 6) неограниченной применимостью, ассоциативностью, коммутативностью, сократимостью слева и справа. **3.1.5.** 1) Левыми нулями являются все постоянные; правых, а значит, и двусторонних нулей нет; 2) правыми нулями являются все функции, принимающие значения из отрезка [0, 1], и только они; левых нулей нет; 3) то же, что и в 1); 4) нулей нет. **3.1.6.** Левыми нулями являются преобразования u_α ($\alpha \in \Omega$), определенные так: $u_\alpha(\xi) = \alpha$ ($\xi \in \Omega$), и только они. **3.1.7.** 1) Полугруппами являются все множества из задачи 3.1.4, из них группами являются 4), 5); 2) оба множества — полугруппы; 3) 4), 5) — полугруппы; 6) не является полугруппой. Ни одна из полугрупп, указанных в 2) — 5), не является группой. **3.1.8.** Тип u равен (1,1), тип v равен (1,2). **3.1.9.** Векторы переноса перпендикулярны данным прямым, длина каждого равна удвоенному расстоянию между данными прямыми, векторы противоположны по знаку. **3.1.11.** 1) Все w_c перестановочны между собой и перестановочны с v; 2) u перестановочно только с w_0, w_1. **3.1.12.** 1) $x\alpha_1 = \alpha_1$, $x\alpha_3 = \alpha_3$, $u(x\alpha_i) = u\alpha_i$ ($\alpha_i \in \Omega, i \neq 1, 3$); 2) $x\alpha_1 = \alpha_3$, $x\alpha_3 = \alpha_1$, $u(x\alpha_i) \neq u\alpha_i$ ($\alpha_i \in \Omega$, $i \neq 1, 3$). **3.1.13.** 1) Полугруппа $[u, v]_s$ состоит из преобразований вида

$$t_{k,l}(n) = \begin{cases} k+1, & \text{если } n \leqslant l+1; \\ n-l+k, & \text{если } n > l+1, \end{cases}$$

где k, l — любая пара целых неотрицательных чисел; 2) полугруппа обладает единственным неприводимым порождающим множеством $\{u, v\}$. **3.1.14.** 1) Регулярно сопряженные с u:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ k & 1 & 2 & \ldots & n-1 & \ldots \end{pmatrix} \qquad (k \in \Omega);$$

регулярно сопряженные с v:

$$u, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ 1 & 3 & 4 & \ldots & n+1 & \ldots \end{pmatrix};$$

2) u, v регулярно сопряжены друг с другом. **3.1.19.** 3) Тождественное преобразование является единственным идемпотентом. **3.1.20.** Подполугруппы — M_3, M_4, M_5, правые идеалы — M_4, M_5, двусторонний идеал — M_4, нормальные подмножества — M_1, M_4, M_5. **3.1.21.** Уравнение $u_2x = v$ не разрешимо. Уравнение $u_1x = v$ имеет единственное решение. Уравнение $u_3x = v$ имеет четыре решения. **3.1.23.** $v\Omega \subset u\Omega$ и для каждого $\beta \in v\Omega$ существует единственный $\alpha \in \Omega$ такой, что $u\alpha = \beta$. **3.1.24.** Уравнения $xu_1 = v$, $xu_2 = v$ разрешимы, $xu_3 = v$ не разрешимо. Первое имеет единственное решение. **3.1.25.** Уравнение $xu = v$ разрешимо тогда и только тогда, когда

из равенства $u\alpha = u\beta$ ($\alpha, \beta \in \Omega$) следует, что $v\alpha = v\beta$. Решение единственно тогда и только тогда, когда кроме этого условия выполняется еще равенство $u\Omega = \Omega$. **3.1.26.** 1) u — взаимно однозначное отображение Ω в себя; 2) $u\Omega = \Omega$; 3) для любого $\alpha \in u\Omega$ выполняется $u\alpha = \alpha$. **3.1.27.** 2) Все элементы T' — идемпотенты; 3) левым идеалом T' является всякое подмножество, содержащее u_0, v_1; правыми идеалами являются $\{u_0\}$, $\{v_1\}$, $\{u_0, v_1\}$, T'. **3.1.28.** Нормальные подмножества — 1), 3), 4). **3.1.32.** Группами являются только M_1, M_3. **3.2.1.** 1) В задаче 3.1.2 обратимым является преобразование u, обратное для него

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

преобразования v, w не являются ни левыми, ни правыми делителями единицы; 2) в задаче 3.1.14 преобразование u является правым делителем единицы, преобразование v является левым делителем единицы. Оба преобразования необратимы. **3.2.2.** $f_1(x)$ — обратимое преобразование при n нечетном, $f_3(x)$ — обратимое преобразование, $f_2(x)$, $f_4(x)$ необратимы. **3.2.3.** $\mathrm{pr}_1\, \rho_u = \mathrm{pr}_2\, \rho_u = \Omega$, каждый срез состоит из одного элемента. **3.2.5.** $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$. **3.2.6.** Единицей является тождественное преобразование. Обратным элементом для преобразования u является обратное преобразование u^{-1}. **3.2.9.** $u^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' & \ldots \\ \alpha & \beta & \gamma & \ldots \end{pmatrix}$. **3.2.10.** 1) Первое условие выполняется для w_c ($c \neq 0$), второе условие выполняется для v, w_c ($c \neq 0$); 2) для всех преобразований задачи 3.1.19 выполняются оба условия; 3) в задаче 3.1.36 первое условие выполняется для преобразований a, c, второе для преобразований a, b, c. **3.2.11.** 1) Необратимо; 2) необратимо; 3) необратимо; 4) w_c ($c \neq 0$), $u_{m,n}$ — обратимые преобразования, остальные необратимы.

$$w_c^{-1}[f(x)] = \frac{1}{c} f(x);$$

$$u_{m,n}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \left(\frac{1}{m}\alpha_1 - \frac{n}{m}, \frac{1}{m}\alpha_2 - \frac{n}{m}, \ldots\right).$$

3.2.12.
$$u^{-1}\left[\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\right] = \frac{f\left(\dfrac{n\varepsilon - l}{-m\varepsilon + k}\right)}{\varphi\left(\dfrac{n\varepsilon - l}{-m\varepsilon + k}\right)}.$$

3.2.13. 2) Является группой; 3) преобразования второго порядка u, v:

$$u\left[\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\right] = \frac{f\left(\dfrac{k\varepsilon + l}{m\varepsilon - k}\right)}{\varphi\left(\dfrac{k\varepsilon + l}{m\varepsilon - k}\right)}, \qquad v\left[\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\right] = \frac{f(-\varepsilon)}{\varphi(-\varepsilon)}.$$

3.2.14. 1)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_2	u_2	u_1	u_6	u_5	u_4	u_3
u_3	u_3	u_5	u_1	u_6	u_2	u_4
u_4	u_4	u_6	u_5	u_1	u_3	u_2
u_5	u_5	u_3	u_4	u_2	u_6	u_1
u_6	u_6	u_4	u_2	u_3	u_1	u_5

2) u_1 — единица, u_2, u_3, u_4 обратны для самих себя. **3.2.16.** H — нормальный делитель G, а H'' — подгруппа G. **3.2.18.** Обратимы 1), 3), 4). **3.2.19.** Группами являются множества 1), 2), 4). **3.2.20.** 24. **3.2.21.**

$$e=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad u=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}.$$

3.3.1. $u^3=(4865)$, $v^2u=(235846)$, $wzt=(16824)(375)$, $w^4z^2=$ $=(2487356)$, $tzw=(186732)(45)$. **3.3.2.** u — элемент двенадцатого порядка, v — элемент пятого порядка. **3.3.4.** $u=(123)(4568)$, $v=$ $=(1, 9, 2, 12)(3, 8)(4, 11, 10)(5, 6, 7)$, $w=(194)(267)(358)$.

3.3.7. 1)

$$u^k\alpha_i=\begin{cases}\alpha_{i+k}, & \text{если } i+k\leqslant n;\\ \alpha_{i+k-n}, & \text{если } i+k>n,\end{cases}$$

при условии, что $0\leqslant k\leqslant n$. Если $k>n$ и $k=pn+r$ $(0<r\leqslant n)$, то $u^k=u^r$. **3.3.10.** $uzu^{-1}=(43251)(23)(26)$, $t^{-2}wt^2=(847)(7523)(8641)$, $v^{-5}zv^5=(82134)(12)(15)$. **3.3.12.** Степени этого цикла и только они. **3.3.13.** Если $u_1=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$, $u_2=(\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_9\alpha_{10})$, то перестановочными с u являются произведения всевозможных степеней u_1 и u_2. **3.3.18.** Если $u=(12)(34)$, $v=(13)(24)$, $w=(14)(23)$, то получим таблицу:

	e	u	v	w
e	e	u	v	w
u	u	e	w	v
v	v	w	e	u
w	w	v	u	e

3.3.27. $m=1$, 2, 3, 4. **3.4.1.** Монотонно возрастающие функции (не обязательно строго). **3.4.2.** 1) Ни одно из преобразований не является эндоморфизмом; 2) t является эндоморфизмом Ω; 3) z не является эндоморфизмом Ω; 4) w_p является эндоморфизмом Ω. **3.4.3.** Преобразование w_p сохраняет действие сложения, преобразование t сохраняет действие умножения. **3.4.4.** Не является. **3.4.13.** Не справедливо.

3.4.14.
$$u\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4.15. $G'=\{1,-1\}$, единичная подгруппа и сама группа. **3.4.16.** 51. **3.4.17.** Группа автоморфизмов состоит из подстановок вида
$$u=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \alpha & \beta & \gamma' & \delta' & \varepsilon' \end{pmatrix},$$
где $(\gamma', \delta', \varepsilon')$ — перестановка чисел γ, δ, ε. **3.4.18.** Эндоморфизмами являются следующие преобразования: 1) все преобразования ранга 1; 2) все преобразования ранга, большего 1, удовлетворяющие условию $u\alpha=\alpha$. **3.4.23.** Не справедливо. **3.4.24.** Не справедливо. **3.4.27.** Являются. **3.4.28.** $u(\sqrt{2})=\pm\sqrt{2}$, $u(\sqrt{3})=\pm\sqrt{3}$.

3.4.32.
$$\begin{pmatrix} 1, \ldots, i-1, & i, & i+1, & i+2, \ldots, n \\ 1, \ldots, i-1, & i, & i, & i+2, \ldots, n \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1, \ldots, i-1, & i, & i+1, & i+2, \ldots, n \\ 1, \ldots, i-1, & i+1, & i+1, & i+2, \ldots, n \end{pmatrix},$$
$$i=1, 2, \ldots, n-1.$$

3.5.3. Элементами конечного порядка являются все вращения на угол $r\pi$ с рациональным r, симметрии и произведения симметрии на параллельный перенос на вектор, перпендикулярный оси симметрии. Элементами второго порядка являются симметрии, вращения на угол π и указанные выше произведения. **3.5.7.** 1) Бесконечный; 2) 2; 3) 1. **3.5.8.** u^{-1} входит в A, если $u(\Phi)=\Phi$. **3.5.9.** Если Φ — шар или правильный многогранник, то A является группой. Для полуплоскости A группой не является. **3.5.10**. Группа всех параллельных переносов плоскости. **3.5.12.** 1) 1; 2) 2; 3) бесконечный. **3.5.13.** G состоит из параллельных переносов плоскости на векторы, параллельные данной прямой, из вращений плоскости на угол π вокруг любой точки, лежащей на данной прямой, и из симметрий плоскости относительно данной прямой и прямых, ей перпендикулярных. **3.5.14.** 1) Группа состоит из вращений ромба вокруг центра на углы 0, π и из симметрий относительно диагоналей ромба; 2) группа восьмого порядка состоит из вращений квадрата вокруг центра на углы 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ и симметрий относительно диагоналей квадрата и прямых, соединяющих середины противоположных сторон; 3) группа состоит из тождественного преобразования и симметрии относительно высоты треугольника; 4) группа единичная. **3.5.15.** Порядок группы равен n. **3.5.16.** Группа порядка $2n$ состоит из вращений вокруг центра на углы 0, $\frac{2\pi}{n}$, ..., $\frac{2(n-1)\pi}{n}$ и симметрий относительно осей симметрии многоугольника. **3.5.17.** Группа состоит из вращений вокруг общей вершины на углы 0, π и из симметрий относительно прямой, на которой лежат диагонали квадратов, и прямой, перпендикулярной к ней и проходящей через общую вершину

квадратов. **3.5.20.** Циклическая группа n-го порядка. **3.5.21.** Только для простых чисел n. **3.5.22.** $4n$. **3.5.25.** Группа состоит из вращений тетраэдра вокруг высот на углы $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ вокруг прямых, соединяющих середины противоположных ребер, на угол π и симметрий относительно двенадцати плоскостей симметрии тетраэдра. **3.5.26.** Вращения вокруг осей симметрии тетраэдра. **3.5.27.** Группа шестого порядка состоит из вращений вокруг диагонали куба, проходящей через вершину A, на углы $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ и симметрий относительно плоскостей симметрии куба, проходящих через вершину A. **3.5.28.** 48. **3.5.30.** Знакопеременная группа четвертой степени. **3.5.31.** Группа десятого порядка, состоящая из пяти вращений икосаэдра вокруг оси симметрии, проходящей через вершину, на углы $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$ и пяти симметрий относительно плоскостей симметрии икосаэдра, проходящих через точку A. **3.5.33.** 1) Вращения на углы $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ вокруг центров треугольников, образованных соседними вершинами Ф, и вращения на угол π вокруг центров ромбов, образованных соседними вершинами Ф. **3.5.34.** 1) Группа состоит из вращений на углы $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ вокруг всевозможных точек с координатами $\left(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}l\right)$, где k, l — произвольные целые числа одинаковой четности; вращений на угол π вокруг всевозможных точек с координатами $\left(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}l\right)$, где k, l — произвольные целые числа различной четности; симметрий относительно осей симметрии всевозможных квадратов, образованных соседними точками из Ф; параллельных переносов на векторы, соединяющие любые две точки Ф; 2) подгруппа состоит из вращений вокруг некоторой точки на углы $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ или порождается двумя симметриями относительно взаимно перпендикулярных осей.

3.6.2. 1) $u_2^2 = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$, $u_1u_2 = \begin{pmatrix} 1\,7\,10 \\ 4\;4\;5 \end{pmatrix}$, $u_2u_1 = \begin{pmatrix} 2\,8 \\ 3\,3 \end{pmatrix}$, $v_1^3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$;

2) типы u_1, v_1, v_2 соответственно равны (2,1); (4,1); (4,2).

3.6.3. 1) Тип $u_1 = \begin{cases} (1,\ 1), \text{ если } \beta = \alpha; \\ (2,\ 1), \text{ если } \beta \neq \alpha; \end{cases}$

2) тип $u_2 = (1,\ 1)$; 3) тип $u_3 = (n,\ 1)$.

3.6.4. $u^{-1} = \begin{pmatrix} 1234578 \\ 7583641 \end{pmatrix}$, $uu^{-1} = \begin{pmatrix} 1234578 \\ 1234578 \end{pmatrix}$, $u^{-1}u = \begin{pmatrix} 1345678 \\ 1345678 \end{pmatrix}$.

3.6.5. uu^{-1} — частично тождественное преобразование, соответствующее множеству $\mathrm{pr}_1 u$, а $u^{-1}u$ — частично тождественное преобразование, соответствующее множеству $\mathrm{pr}_2 u$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathrm{pr}_1 u = \mathrm{pr}_2 u$. **3.6.6.** 1) $\mathrm{pr}_1 [f_1(x)] = (-\infty, \infty)$, $\mathrm{pr}_2 [f_2 f_3 (x)] = \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$, где k — любое нечетное число, $\mathrm{pr}_1 [f_2 f_3 (x)] = \{0\}$; 2) $\mathrm{pr}_2 [f_1^2 (x)] = \left(\frac{1}{2}, \frac{e}{1+e}\right)$, $f_1^2 (x) = \ln \frac{\ln \frac{x}{1-x}}{\ln \frac{e(1-x)}{x}}$, $\mathrm{pr}_2 [f_5 f_4 (x)] = \{-1, 1\}$, $f_5 f_4 (x) = 0$, $f_5^2 f_4 (x) = \theta$; 3) $\mathrm{pr}_2 [f_2^n (x)] = (-\infty, -\sqrt{n}] \cup [\sqrt{n}, \infty)$, $f_2^n (x) = \sqrt{x^2 - n}$. **3.6.7.** 1) Взаимно однозначными являются $f_1(x)$, $f_4(x)$, $f_6(x)$; 2) $\mathrm{pr}_2 f_1^{-1}(x) = (-\infty, \infty)$, $f_1^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $\mathrm{pr}_2 f_4^{-1}(x) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f_4^{-1}(x) = \sin x$, $\mathrm{pr}_2 f_6^{-1}(x) = \left(-\infty, \frac{a}{c}\right) \cup \left(\frac{a}{c}, \infty\right)$, если $c \neq 0$; $\mathrm{pr}_2 f_6 (x) = (-\infty, \infty)$, если $c = 0$; $f_6^{-1}(x) = \frac{dx - b}{a - cx}$; 3) $f_i^{-1} f_i (x) = e_{\mathrm{pr}_2 f_i}$, $f_i f_i^{-1}(x) = e_{\mathrm{pr}_2 f_i^{-1}}$. **3.6.9.** $u^2 = \theta$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{pr}_1 u \cap \mathrm{pr}_2 u = \varnothing$; $u^3 = \theta$ тогда и только тогда, когда для каждого $\alpha \in \mathrm{pr}_1 u \cap \mathrm{pr}_2 u$ выполняется условие $u\alpha \notin \mathrm{pr}_2 u$. **3.6.10.** Только в том случае, если $\mathrm{pr}_1 u_2 \subset \mathrm{pr}_2 u_1$. **3.6.12.** 1) Только тогда, когда $\mathrm{pr}_1 u \subset \mathrm{pr}_2 u$ и для $\alpha \in \mathrm{pr}_1 u$ выполняется $u^2\alpha = u\alpha$; 2) частично тождественные преобразования и только они. **3.6.13.** 1) Если $\mathrm{pr}_1 u = \Omega$; 2) если $\mathrm{pr}_2 u = \Omega$ и u взаимно однозначно. **3.6.14.** 1) Если $\mathrm{pr}_2 u \neq \Omega$; 2) если $\mathrm{pr}_1 u \neq \Omega$. **3.6.17.** Правый срез ρ по каждому $\alpha \in \Omega$ должен состоять не более чем из одного элемента. **3.6.18.** 1) u — тождественное преобразование; 2) $\mathrm{pr}_1 u = \mathrm{pr}_2 u = M$ и $u^2 = e_M$, где M — подмножество Ω; 3) если $\alpha \in \mathrm{pr}_2 u$ и $u\alpha \neq \alpha$, то $\alpha \notin \mathrm{pr}_1 u$. **3.6.23.** Если Ω — множество всех вещественных чисел, то

$$\mathrm{pr}_2 f^2 = \Omega \setminus \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}, \quad f^2(x) = \frac{x-9}{3x-2};$$

$$\mathrm{pr}_2 f^3 = \Omega \setminus \left\{-1, \frac{2}{3}, \frac{11}{4}\right\}, \quad f^3(x) = \frac{-7x-12}{4x-11}.$$

3.6.24. R группой не является.

Глава IV

4.1.6. $S_3 = \{e, (12)\} \cup \{(13), (123)\} \cup \{(23), (132)\}$. **4.1.7.** $A_4 = \{e, (123), (132)\} \cup \{(124), (13)(24), (324)\} \cup \{(142), (143), (14)(23)\} \cup \{(234), (134), (12)(34)\}$. **4.1.8.** $K = \{1, -1\} \cup \{i, -i\} \cup \{j, -j\} \cup \{k, -k\}$. Правое и левое разложения совпадают, так как $\{-1, 1\}$ является нормальным делителем группы K.

4.1.9. $G=\{e\}\cup\{x\}\cup\{x^2\}\cup\{x^3\}\cup\{x^4\}\cup\{x^5\}\cup\{x^6\}\cup$
$\cup\{x^7\}\cup\{x^8\}\cup\{x^9\}$,

$$G=\{e, x^5\}\cup\{x, x^6\}\cup\{x^2, x^7\}\cup\{x^3, x^8\}\cup\{x^4, x^9\},$$

$$G=\{e, x^2, x^4, x^6, x^8\}\cup\{x, x^3, x^5, x^7, x^9\},$$

$$G=\{e, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9\}.$$

4.1.10. $G=K_0\cup K_1\cup K_2$, где K_0 — совокупность всех x^n, где n делится на 3; K_1 — совокупность всех x^n, где n при делении на 3 дает остаток 1; K_2 — совокупность всех x^n, где n при делении на 3 дает остаток 2. Через представителей разложение можно записать, например, так:

$$G=[x^3]_g\cup x[x^3]_g\cup x^2[x^3]_g.$$

4.1.11. Разложение G по e является представлением G в виде объединения всех одноэлементных подмножеств. Разложение G по самой G состоит из одного смежного класса, равного самой G. **4.1.14.** 1) $f[f(z)]=f(z)$; 2) $f(z)z^{-1}\in H$; 3) $f(hz)=f(z)$. **4.1.18.** 81. **4.1.24.** K_1, K_3, K_5 являются смежными классами; K_2, K_4 не являются. **4.1.25.** Указанное множество будет одновременно правым и левым смежным классом по подгруппе, состоящей из всех матриц, определитель которых равен 1.

4.1.27. $S_4=\{e, (123), (132), (12)(34), (134), (234)\}\cup$
$\cup\{(12), (23), (13), (34), (1342), (1234)\}\cup$
$\cup\{(14), (1423), (1432), (1243), (1324), (24)\}\cup$
$\cup\{(124), (13)(24), (243), (143), (14)(23), (142)\}$.

4.1.28. $S_3=\{e, (12)\}\cup\{(13), (23), (132), (123)\}$. **4.2.4.** $S_3=\{e\}\cup$ $\cup\{(12), (13), (23)\}\cup\{(123), (132)\}$. **4.2.5.** $K=\{1\}\cup\{-1\}\cup\{i,-i\}\cup$ $\cup\{j,-j\}\cup\{k,-k\}$. **4.2.6.** 6. **4.2.8.** Нормализатор x представляет собой множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$. Нормализатор y — вся группа. Нормализатор z представляет собой множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $(a\neq 0)$. **4.2.13.** Циклическая группа второго порядка. **4.2.14.** Нормализатором элемента вида $(2k+1, m)$ является множество всех элементов вида $(2a, 0)$ и вица $(2a+1, b)$, где a, b — любые целые числа; число элементов, сопряженных с ним, бесконечно. Нормализатором элемента вида $(2k, m)$, где $m\neq 0$, является множество всех элементов вида $(2a, b)$ (a, b — любые целые числа); число элементов, сопряженных с ним, равно двум. Нормализатором элемента $(2k, 0)$ является вся группа; число элементов, сопряженных с ним, равно единице.

4.2.20. $S_4=\{e\}\cup\{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}\cup$
$\cup\{(123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)\}\cup$
$\cup\{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}\cup$
$\cup\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

4.2.21. $A_4 = \{e\} \cup \{(123),\ (134),\ (142),\ (243)\} \cup$
$\cup \{(124),\ (132),\ (143),\ (234)\} \cup \{(12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$.

4.2.22. Сопряженными элементами являются только M_1, M_3. **4.3.1.** e, $\{e,\ (123),\ (132)\}$, S_3. **4.3.2.** M_1 порождает S_4; M_2 порождает знакопеременную группу; M_3—нормальный делитель. **4.3.3.** Является. **4.3.12.** N — единица группы, $(xN)^{-1} = x^{-1}N$. **4.3.14.** G/G — единичная группа, G/E совпадает с группой G. **4.3.32.** $\overline{H}_1 = G/N$, $\overline{H}_2 = \{N, xN\}$, где $|x| = -1$, $x \in G$. **4.3.34.** Знакопеременная группа четвертой степени, группа Клейна и подгруппы

$$\{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23),\ (12),\ (34),\ (1423),\ (1324)\},$$
$$\{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23),\ (13),\ (24),\ (1234),\ (1432)\},$$
$$\{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23),\ (23),\ (14),\ (1342),\ (1243)\}.$$

Нормальными делителями S_4 являются знакопеременная группа и группа Клейна. **4.4.8.** 1) Подгруппы, содержащие группу Клейна (см. 4.3.34); 2) четыре циклические подгруппы, порожденные тройными циклами.

4.4.9. $[(x^2,\ y^0)]$, $[(x^5,\ y),\ (x^0,\ y^2)]$, $[(x,\ y),\ (x^6,\ y)]$,

$$[(x^3,\ y),\ (x^8,\ y)],\ [(x^7,\ y),\ (x^2,\ y)],\ [(x^9,\ y),\ (x^4,\ y)].$$

4.5.2. Каждый коммутатор равен единице. **4.5.6.** $(x_1,\ x_2) = (132)$, $(x_1,\ x_3) = (142)$, $(x_1,\ y) = (12)(34)$, $(x_2,\ x_1) = (123)$, $(x_3,\ x_1) = (124)$, $(y,\ x_1) = (12)(34)$. **4.5.7.** -1 и 1. **4.5.8.** $(x,\ y) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $(y, z) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $(z,\ x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\textbf{4.5.9.}\quad (u,\ v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad (v,\ w) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(w,\ u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.5.10. $(x,\ y) = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$. **4.5.14.** Знакопеременная группа A_n. **4.5.21.** Группа всех параллельных переносов. **4.5.22.** Подгруппа матриц с определителем $+1$. **4.6.12.** Циклические группы простых порядков. **4.6.15.** При $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. **4.6.16.** Группа разрешима. **4.6.17.** Группа разрешима. **4.7.2.** 1 — для неединичных абелевых групп; 0— для единичной группы. **4.7.3.** 1) S_n не являются нильпотентными ни при каком $n > 2$, S_1 — нильпотентная класса 0, S_2 — нильпотентная класса 1; 2) нильпотентная группа класса 2; 3) нильпотентная клас-

са 2; 4) не является нильпотентной; 5) нильпотентная класса 2. **4.7.6.** Нижний центральный ряд: $H_0 = H$; $H_1 = \{(\varepsilon, 1); (\varepsilon, -1); (\varepsilon, k); (\varepsilon, -k)\}$; $H_2 = \{(\varepsilon, 1); (\varepsilon, -1)\}$; $H_3 = e$. Верхний центральный ряд: $Z_0 = e$; $Z_1 = \{(\varepsilon, 1); (\varepsilon, -1)\}$; $Z_2 = \{(\varepsilon, 1); (\varepsilon, -1); (\varepsilon, k), (\varepsilon, -k)\}$; $Z_3 = H$. **4.7.11.** 2. **4.7.15.** 1) Не является нильпотентной; 2) нильпотентная класса 2; 3) не является нильпотентной; 4) нильпотентная класса 3. **4.7.17.** Среди чисел $k_1, k_2, k_3, \ldots$ должно найтись наибольшее. Оно в этом случае и будет классом нильпотентности группы H. **4.7.20.** Тогда и только тогда, когда среди чисел $k_1, k_2, k_3, \ldots$ найдется наибольшее. **4.8.1.** u_3 — автоморфизм. **4.8.2.** u_1, u_2 — автоморфизмы. **4.8.4.** u_3, u_5 — автоморфизмы. **4.8.5.** Группа автоморфизмов изоморфна симметрической группе S_3. **4.8.6.** Циклическая группа второго порядка. **4.8.11.** 1) Группа автоморфизмов изоморфна группе Клейна (см. 3.3.18); 2) группа автоморфизмов является циклической группой шестого порядка. **4.8.14.** Пусть $u_3 = (13)$, $u_4 = (23)$, $u_5 = (123)$; тогда

$$t_{u_1} = \begin{pmatrix} e & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ e & u_1 & u_5 & u_4 & u_3 & u_2 \end{pmatrix}, \quad t_{u_2} = \begin{pmatrix} e & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ e & u_3 & u_2 & u_4 & u_1 & u_5 \end{pmatrix}.$$

4.8.15. $t_{-1} = e$, $t_{-i} = (j, -j)\ (k, -k)$, $t_j = (i, -i)\ (k, -k)$. **4.8.16.** Только тогда, когда она коммутативна. **4.8.17.** 4. **4.8.22.** 24. **4.8.23.** $\varphi(x + yi) = (xa + yc) + (xb + yd)\, i$, где (a, b, c, d) — произвольная четверка целых чисел такая, что $ad - bc = \pm 1$. **4.8.27.** Если $u_1 = (12)\ (34)$, $u_2 = (13)\ (24)$, $u_3 = (14)\ (23)$, то

$$\bar{t}_{(12)} = \bar{t}_{(34)} = \bar{t}_{(1423)} = \begin{pmatrix} e & u_1 & u_2 & u_3 \\ e & u_1 & u_3 & u_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{t}_{(132)} = \begin{pmatrix} e & u_1 & u_2 & u_3 \\ e & u_2 & u_3 & u_1 \end{pmatrix}.$$

4.8.28. 24. **4.9.4.** G_1 транзитивна; $M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $M_2 = \{5, 6\}$ — системы интранзитивности группы G_2; $M_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, $M_4 = \{5, 6, 7\}$ — системы интранзитивности G_3. **4.9.14.** $M_1 = \{\alpha, \gamma\}$, $M_2 = \{\beta, \delta\}$. **4.9.15.** 1) A_4, S_4 примитивны; 2) циклические подгруппы четвертого порядка, группа Клейна и все подгруппы восьмого порядка, содержащие группу Клейна, импримитивны (см. 4.3.34). **4.9.17.** Если n — простое число. **4.9.18.** 1), 2) — транзитивные группы; 1) — примитивная группа. **4.9.25.** Множество H из предыдущей задачи. **4.9.31.** 1) Дважды транзитивная группа. **4.9.32.** $n \geqslant 4$. **4.9.33.** 2.

Глава V

5.1.1. Соотношения: $t_1 = t_2$, $t_1 = t_4$, $t_2 = t_4$, $t_3 = t_5$. **5.1.2.** Следствиями остальных являются соотношения: $a^5 = a^3$, $a^7cb^5a^3b^{11} = a^3c$, $bca^3 = cba^2$, $a^3ca = a^3c$, $bc = cb$. **5.1.6.** Не является. **5.1.15.** $11! - 1$.

5.1.16. 1)

	u	v	uv	vu
u	u	uv	uv	u
v	vu	v	v	vu
uv	u	uv	uv	u
vu	vu	v	v	vu

2) регулярна.

5.1.20. Не будет, за исключением случая, когда K состоит из одного элемента. **5.1.22.** 1) a — единственный идемпотент; 2) a, $a^\alpha c^\delta b^n$, где $\alpha = 0, 1$; δ — произвольное натуральное число; 3) (1, 1), бесконечные. **5.1.23.** 2) (1, 1), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (5, 5), бесконечный; 3) a, ac^m, где $m = 1, 2, 3, 4$. **5.1.27.** 1) Полугруппа A регулярна, 2) регулярно сопряженным с $a^\alpha b^\beta$ является $a^\beta b^\alpha$ (каждый элемент A можно записать в виде $a^\alpha b^\beta$, где α, β — целые неотрицательные числа); 3) A не имеет нетождественных автоморфизмов. **5.3.3.** Единицей группы является класс, содержащий $k\varphi(k)$, а обратным для класса, содержащего k, является класс, содержащий $\varphi(k)$. **5.3.8.** 1) 2; 2) бесконечный; 3) 4; H_1, H_3 — нормальные делители, H_2 не является нормальным делителем. **5.3.9.** Свободная группа ранга 1, т. е. бесконечная циклическая группа. **5.3.17.** 2^n. **5.4.3.** Коммутативна только G_1. **5.4.5.** Группа бесконечного порядка. **5.4.6.** Подгруппа $[y]$ бесконечна. **5.4.7.** $u_2 = u_5$, $u_3 = u_6$, остальные различны. **5.4.8.** $v_1 = v_4$, $v_6 = v_7 = v_8$, $v_2 = v_3 = v_5$. **5.4.9.** 2^n, где n — число элементов множества K. **5.4.10.** 2) $x^{\varepsilon_1}y^{m_1} = x^{\varepsilon_2}y^{m_2}$, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $m_1 = m_2$, $x^{\varepsilon_2}y^{m_2} = (x^{\varepsilon_1}y^{m_1})^{-1}$, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $m_2 = -m_1$ или если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $m_2 = m_1 - 2$. **5.4.14.** Элементов конечного порядка и элементов бесконечного порядка бесконечное количество. **5.4.15.** Кроме единицы элементами конечного порядка являются элемент $(x_1x_2 \ldots x_n)$ и все элементы, сопряженные с ним. **5.4.18.** 1) 12; 2) $\{e, (ab)^2\}$; 3) группа автоморфизмов изоморфна G. **5.4.20.** 3. **5.4.23.** 5. **5.4.27.** Если $q \not\equiv 1 \pmod p$, то группа одна — циклическая. Если $q \equiv 1 \pmod p$, то группы две — циклическая и группа G_r^{pq} из задачи 5.2.22. **5.4.28.** Одна группа порядка 15, две группы порядка 14.

5.4.29.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(n)$	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2

5.5.1. Разложима. **5.5.2.** Свободная группа A разложима в свободное произведение тогда и только тогда, когда A не является бесконечной циклической группой. **5.5.4.** $G = G_1 * G_4$. **5.5.6.** Не существует. **5.5.8.** Не может. **5.5.9.** В G нет элементов конечного порядка, отличных от единицы. **5.5.14.** Подгруппы B и C изоморфны всегда. **5.5.15.** G не является периодической группой. **5.5.17.** Никогда. **5.5.18.** Центр равен e. **5.5.19.** Не может. **5.5.21.** Существует. **5.6.1.** G является прямым произведением четырех циклических групп порядков 7, 13, 3 и 5. **5.6.5.** 1) Неразложима; 2) неразложима; 3) неразложима; 4) разложима; 5) неразложима. **5.6.8.** Неразложима. **5.6.9.** Только одно. **5.6.15.** Существуют. **5.6.16.** $m_1m_2\ldots m_n$. **5.6.27.** Если порядки всех групп G_i различны. **5.6.32.** Не может.

Глава VI

6.1.2. Подгруппа всех корней всех степеней из единицы. **6.1.12.** Не изоморфны. **6.1.14.** Всегда имеет единственное решение. **6.1.16.** Циклические группы простых порядков и только они. **6.1.17.** Не суще-

ствует. **6.1.19.** 1) Циклическая группа порядка 15; 2) 4; 3) прямое произведение четырех бесконечных циклических групп; 4) прямое произведение циклической группы порядка 3 и четырех бесконечных циклических групп. **6.2.2.** 1) Циклические группы порядков 7 и 3; 2) циклические группы порядков 3, 2 и 5; 3) циклические группы порядков 2, 3, 7, 11; 4) циклическая группа порядка 101. **6.2.3.** 1) 4; 2) 2; 3) 2; 4) 2. **6.2.4.** Прямое произведение циклических групп порядков 2, 3, 5, 7, 11, 13. **6.2.10.** 1) 5, 7; 2) 2^3; 3) 2, 3; 4) 3, 2^2, 5; 5) 2^3, 2, 2. **6.2.11.** Необходимо и достаточно, чтобы G была примарной относительно p. **6.2.14.** $p_1^{k_1}, \ldots, p_n^{k_n}$. **6.2.15.** $p_1^{k_1}, \ldots, p_n^{k_n}$. **6.2.16.** Циклические группы и абелевы группы с инвариантами p, p. **6.2.17.** Циклические группы простого порядка. **6.2.18.** Не существует. **6.2.19.** $p^3 - 1$. **6.2.20.** 1) 10000; 2) существуют подгруппы порядков 25, 10, 40; не существует подгрупп порядков 31, 27, 120; 3) 2, 2, 5 и 2^2, 5. **6.2.21.** Не существует. **6.2.22.** 11. **6.3.8.** 1) Ранг 1, набор инвариантов 3; 2) бесконечная циклическая группа; 3) ранг 1, набор инвариантов 5; 4) циклическая группа порядка 11; 5) группа без кручения ранга 2; 6) ранг 1, набор инвариантов 3; 7) группа без кручения ранга 2; 8) ранг 1, инварианты 3, 3, 2; 9) бесконечная циклическая группа. **6.3.9.** 1) 2; 2) циклическая группа порядка 10; 3) прямое произведение двух бесконечных циклических групп; 4) 4; 5) $[a_1^2]$, $[a_1^5]$. **6.3.10.** 1) Существует; 2) существует; 3) не существует; 4) не существует. **6.3.11.** Не существуют. **6.3.12.** 3; 5. **6.3.14.** 1) 11; 2) 11; 3) существуют. **6.3.15.** 40. **6.3.16.** 31. **6.3.17.** 1) Существуют; 2) не существует. **6.4.9.** Не имеет. **6.4.10.** Не существует. **6.4.11.** 1) Полная; 2) полная; 3) полная; 4) полная; 5) не является полной. **6.4.14.** Не может. **6.4.16.** 1) Всегда; 2) всегда; 3) всегда. **6.4.27.** Пусть $m = p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}$, где p_i простые, занумерованные в порядке возрастания. Тогда 1) $(\infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$; 2) $(k_1, \ldots, k_n, 0, \ldots)$; 3) $(\infty, k_2, \ldots, k_n, 0, \ldots)$.

Глава VII

7.1.1. $\varphi_1(z_i) = u_1, \qquad \varphi_2(z_i) = u_2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$

других представлений Ω в классе Π не существует. **7.1.2.** φ не является представлением полугруппы A преобразованиями. **7.1.3.** φ нельзя продолжить до представления полугруппы A.

7.1.8.
$$\varphi_1(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$
$$i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Все φ_j $(j = 1, 2, 3)$ несущественно отличаются друг от друга. Среди φ_j $(j = 1, 2, 3)$ нет изоморфных представлений. **7.1.11.** 1) Пусть φ — представление моногенной полугруппы $A = [a]$ левыми сдвигами; тогда

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \\ a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(a^2) = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \\ a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^3 & a^4 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(a^3)=\begin{pmatrix}a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7\\ a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^3 & a^4 & a^5\end{pmatrix},\quad \varphi(a^4)=\begin{pmatrix}a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7\\ a^5 & a^6 & a^7 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6\end{pmatrix},$$

$$\varphi(a^5)=\begin{pmatrix}a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7\\ a^6 & a^7 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7\end{pmatrix},\quad \varphi(a^6)=\begin{pmatrix}a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7\\ a^7 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^3\end{pmatrix},$$

$$\varphi(a^7)=\begin{pmatrix}a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7\\ a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^3 & a^4\end{pmatrix}.$$

Представление φ не является изоморфным представлением. 2) $A_1=\{a_1, a_2\}$. Пусть φ_1 — представление A_1 левыми сдвигами; тогда

$$\varphi_1(a_1)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_1 & a_2\end{pmatrix},\quad \varphi_1(a_2)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_2\end{pmatrix}.$$

Представление φ_1 является изоморфным представлением. 3) Обозначим представление левыми сдвигами A_2 через φ_2; тогда

$$\varphi(a_1)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_1 & a_1\end{pmatrix},\quad \varphi(a_2)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_2\end{pmatrix},\quad \varphi(a_3)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix},$$

φ — изоморфное представление A_2. **7.1.15.** $\varphi(x)(y)=x$ $(x, y\in M)$. **7.1.16.** Тождественное преобразование множества M. **7.1.21.** A не имеет полной системы представлений в П. **7.1.22.** Не существует. **7.1.23.** Бесконечные моногенные полугруппы, моногенные полугруппы, имеющие тип $(1, d)$, и только такие. **7.1.24.** Только единичная группа. **7.1.25.** Коммутативные полугруппы и только они. **7.1.26.** 1) Полугруппы с левым сокращением и только они; 2) полугруппы с правым сокращением и только они; 3) полугруппы с двусторонним сокращением и только они. **7.1.29.** Коммутативные полугруппы, все элементы которых идемпотентны, и только они.

7.2.4.
$$\varphi_H(a)=\begin{pmatrix}H, & aH, & bH, & abH\\ aH, & H, & abH, & bH\end{pmatrix},\quad \varphi_H(b)=\begin{pmatrix}H, & aH, & bH, & abH\\ bH, & abH, & H, & aH\end{pmatrix}.$$

Представление φ_H не изоморфное.

7.2.6. Обозначим представления данных групп левыми сдвигами соответственно через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$; тогда

1) $\varphi_1(1)=e,\quad \varphi_1(-1)=(1, -1)(i, -i)(j, -j)(k, -k),$

$\varphi_1(i)=(1, i, -1, -i)(j, k, -j, -k),$

$\varphi_1(-i)=(1, -i, -1, i)(j, -k, -j, k),$

$\varphi_1(j)=(1, j, -1, -j)(i, -k, -i, k),$

$\varphi_1(-j)=(1, -j, -1, j)(i, k, -i, -k),$

$\varphi_1(k)=(1, k, -1, -k)(i, j, -i, -j),$

$\varphi_1(-k)=(1, -k, -1, k)(i, -j, -i, j);$

2) $\varphi_2(e)$ — тождественная подстановка,

$$\varphi_2(a)=(e, a)(b, ab)(ba, aba)(bab, (ab)^2),$$
$$\varphi_2(b)=(e, b)(a, ba)(ab, bab)(aba, (ab)^2),$$

$$\varphi_2(ab) = (e,\ ab,\ (ab)^2,\ ba)\ (b,\ a,\ aba,\ bab),$$
$$\varphi_2(ba) = (e,\ ba,\ (ab)^2,\ ab)\ (a,\ b,\ bab,\ aba),$$
$$\varphi_2(aba) = (e,\ aba)\ (a,\ ab)\ (b,\ (ab)^2)\ (bab,\ ba),$$
$$\varphi_2(bab) = (e,\ bab)\ (a,\ (ab)^2)\ (b,\ ba)\ (ab,\ aba),$$
$$\varphi_2[(ab)^2] = (e,\ (ab)^2)\ (ab,\ ba)\ (b,\ aba)\ (a,\ bab);$$

3) если G — нециклическая группа шестого порядка, то ее можно задать так: $G = [a,\ b]$, где $a^2 = b^3 = e$, $a^{-1}ba = b^2$ и, значит, $G = \{e,\ a,\ b,\ b^2,\ ab,\ ab^2\}$; $\varphi_3(e)$ — тождественная подстановка,

$$\varphi_3(a) = (e,\ a)\ (b,\ ab)\ (b^2,\ ab^2);\quad \varphi_3(b) = (e,\ b,\ b^2)\ (a,\ ab^2,\ ab),$$
$$\varphi_3(b^2) = (e,\ b^2,\ b)\ (a,\ ab,\ ab^2);\quad \varphi_3(ab) = (e,\ ab)\ (b,\ ab^2)\ (a,\ b^2),$$
$$\varphi_3(ab^2) = (e,\ ab^2)\ (a,\ b)\ (ab,\ b^2);$$

4) если $G = \{e, a,\ a^2,\ a^3\}$, то $\varphi_4(e)$ — тождественная подстановка,

$$\varphi_4(a) = (e,\ a,\ a^2,\ a^3);\ \varphi_4(a^2) = (e,\ a^2)\ (a,\ a^3);$$
$$\varphi_4(a^3) = (e,\ a^3,\ a^2,\ a).$$

7.2.8. Единичная подгруппа. **7.2.18.** Представление неизоморфное. **7.2.24.** Представление по подгруппам $\{e,\ a\}$, $\{e,\ b\}$ и представление левыми сдвигами. **7.2.26.** Не имеет.

7.2.27.

1)
$$\varphi_{H_1}(12) = \begin{pmatrix} H_1, & (12)\,H_1, & (13)\,H_1, & (14)\,H_1, & (23)\,H_1, & (34)\,H_1 \\ (12)\,H_1, & H_1, & (34)\,H_1, & (23)\,H_1, & (14)\,H_1, & (13)\,H_1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{H_1}(12\,34) = \begin{pmatrix} H_1, & (12)\,H_1, & (13)\,H_1, & (14)\,H_1, & (23)\,H_1, & (34)\,H_1 \\ H_1, & (23)\,H_1, & (13)\,H_1, & (12)\,H_1, & (34)\,H_1, & (14)\,H_1 \end{pmatrix};$$

2)
$$\varphi_{H_2}(12) = \begin{pmatrix} H_2, & (13)\,H_2, & (14)\,H_2, & (23)\,H_2, & (13)\,(24)\,H_2, & (24)\,H_2 \\ H_2, & (23)\,H_2, & (24)\,H_2, & (13)\,H_2, & (13)\,(24)\,H_2, & (14)\,H_2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{H_2}(12\,34) = \begin{pmatrix} H_2, & (13)\,H_2, & (14)\,H_2, & (23)\,H_2, & (24)\,H_2, & (13)\,(24)\,H_2 \\ (13)\,H_2, & (13)\,(24)\,H_2, & (23)\,H_2, & (14)\,H_2, & H_2, & (24)\,H_2 \end{pmatrix}.$$

7.2.33. Для коммутативных групп. **7.3.4.** Будет. **7.3.5.** Не будет. **7.3.6.** Отображение T не может быть продолжено до представления группы G. **7.3.10.** Существует. **7.3.15.** Представление T не является вполне приводимым. **7.4.3.** Бесконечная циклическая группа. **7.4.5.** Единичная группа. **7.4.7.** $\Phi(A,\ B)$ изоморфно подгруппе всех элементов B, порядки которых делят число p^n. **7.4.8.** Группа эндоморфизмов изоморфна G. **7.4.11.** Бесконечная циклическая группа. **7.4.12.** Конечно порожденная абелева группа без кручения ранга r. **7.4.13.** Циклическая группа порядка 2. **7.4.14.** Конечная абелева

группа с инвариантами $5^2, 5^2$, 5, 5, 5. **7.4.15.** Конечная группа с инвариантами 7^2, 7. **7.4.16.** Циклическая группа порядка 5. **7.4.18.** 1) Циклическая группа порядка 5; 2) конечная абелева группа с инвариантами 5, 5, 5, 5, 5, 5; 3^2, 3^2, 3, 3; 3) циклическая группа порядка 2. **7.4.19.** 1) Прямое произведение двух бесконечных циклических групп и двух циклических порядка 3; 2) циклическая группа порядка 3; 3) конечная абелева группа с инвариантами 17, 17. **7.4.20.** 1) Конечная абелева группа с инвариантами 5^3, 5^2, 5^2, 5^2, 5, 5, 5, 5, 5; 7^2, 7, 7, 7; 3^3, 3, 3, 3; 2^3, 2^2, 2^2, 2^2, 2, 2, 2, 2, 2;

2) конечная абелева группа с инвариантами 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3; 5^2, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5; 7, 7, 7, 7;

3) конечно порожденная абелева группа ранга 4 с набором инвариантов 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5; 7^3, 7^3, 7^3, 7, 7, 7, 7, 7;

4) прямое произведение сорока девяти бесконечных циклических групп.

7.4.26. 1) Не может; 2) не может.

7.4.28. 1) Необходимо и достаточно, чтобы A была конечной циклической группой; 2) необходимо и достаточно, чтобы A была бесконечной циклической группой. **7.4.29.** Не существует. **7.4.32.** Не может. **7.4.34.** Необходимо и достаточно, чтобы A была или бесконечной циклической группой, или конечной группой, все примарные компоненты которой суть циклические группы. **7.5.1.** 1) $\chi(g) = 2\cos\varphi_g + 1$, 2) $\chi(e) = 3$, $\chi(a_1) = 0$, $\chi(a_1^2) = 0$, $\chi(a_2) = 1$, $\chi(a_1a_2) = 1$, $\chi(a_1^2a_2) = 1$; 3) $\chi(a^k) = 2$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **7.5.5.** Существует, например, циклическая группа простого порядка p. **7.5.7.** Существует только n характеров χ_i $(i = 1, \ldots, n)$ группы $[a]$. Все они описываются следующей формулой:

$$\chi_i(a^k) = \xi^{ki} \quad (i,\ k = 1, \ \ldots, \ n),$$

где ξ — первообразный корень степени n из 1. **7.5.9.** 1) Циклическая группа порядка p^k; 2) конечная абелева группа с инвариантами 3,3; 3) циклическая группа порядка 10. **7.5.11.** Группа характеров изоморфна мультипликативной группе всех комплексных чисел, модуль которых равен 1. **7.5.12.** Группа характеров изоморфна прямому произведению r групп, каждая из которых изоморфна мультипликативной группе всех комплексных чисел, модуль которых равен 1.

Глава VIII

8.1.1. 1) Метрика; 2) метрика; 3) метрика; 4) метрика; 5) не является метрикой; 6) не является метрикой; 7) метрика. **8.1.2.** 2) Будет. **8.1.3.** 1) Не всегда; 2) не всегда; 3) не всегда; 4) всегда. **8.1.6.** $a > 0$; $b = 0$. **8.1.7.** 1) Всегда; 2) никогда; 3) никогда. **8.1.11.** Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности f_n к функции f в смысле метрики $C_{[a,\ b]}$ является равномерная сходи-

мость f_n к функции f. **8.1.14.** 1) Не полное; 2) полное; 3) полное; 4) полное. **8.1.17.** Можно. **8.1.18.** 1) Не компактно; 2) не компактно; 3) не компактно. **8.2.3.** 1) Непрерывно; 2) не является непрерывным; 3) не является непрерывным; 4) непрерывно; 5) не является непрерывным. **8.2.4.** Непрерывными преобразованиями R являются непрерывные функции и только они. Взаимно непрерывными преобразованиями являются монотонно убывающие или монотонно возрастающие непрерывные функции, область изменения которых совпадает с R, и только они. **8.2.11.** Образует. **8.2.20.** Можно. **8.2.22.** Нельзя. **8.3.2.** Операциями замыкания являются преобразования из 1), 2). **8.3.4.** 1) Открытое; 2) замкнутое и открытое; 3) замкнутое и открытое; 4) замкнутое; 5) замкнутое. **8.3.8.** Существует. **8.3.9.** Все вещественные числа. **8.3.16.** Существуют. **8.3.18.** Каждое топологическое пространство имеет базис. **8.3.21.** Σ является базисом R. **8.3.22.** 1) Σ является базисом R_0; 2) обе топологии совпадают. **8.3.23.** Непрерывное отображение. **8.3.24.** F_1, F_2, F_3, F_4 непрерывны, F_5 не является непрерывным отображением. **8.3.25.** Всегда. **8.3.31.** Обе топологии совпадают. **8.3.32.** Топологии не совпадают. **8.4.1.** 1) Топологическая группа; 2) топологическая группа. **8.4.2.** Топологическая группа. **8.4.3.** Топологическая группа. **8.4.4.** Топологическая группа. **8.4.6.** Fa, aF, F^{-1} — замкнутые множества. UP, PU, U^{-1} — открытые множества. **8.4.9.** Топологическая группа. Топологии, определяемые Σ_p и Σ_q, не совпадают. **8.4.10.** C — топологическая подгруппа D. **8.4.11.** H и N — нормальные делители G, множество P замкнуто тогда и только тогда, когда α — рациональное число. **8.4.12.** Всегда. **8.4.14.** Не всегда. **8.4.15.** Подгруппами топологической группы G будут все алгебраические подгруппы G. Любой алгебраический изоморфизм G на группу G' будет непрерывным отображением G на G'. Не всякий алгебраический изоморфизм G на G' является топологическим изоморфизмом. **8.4.16.** R_0 топологически изоморфно R_0'. **8.4.18.** 1) Не является подгруппой; 2) подгруппа, но не нормальный делитель; 3) подгруппа, но не нормальный делитель; 4) нормальный делитель. **8.4.21.** Непрерывное, открытое; φ является топологическим изоморфизмом тогда и только тогда, когда $N = e$. **8.4.26.** Топологическая группа Z топологически изоморфна топологической группе Z'. **8.4.27.** A и B — замкнутые подмножества, $A + B$ не замкнуто. **8.4.32.** Всегда. **8.4.33.** Всякая подгруппа H является непрерывной группой преобразований пространства Г. Не всякая подгруппа G является транзитивной группой преобразований пространства Г. **8.4.34.** Является. **8.4.35.** Можно. **8.4.38.** Отображение ψ^{-1} непрерывно. **8.5.3.** 1) Отношение двусторонне стабильно, положительная часть состоит из всех $z = a + bi$ таких, что или $a > 0$ или $a = 0$ и $b \geqslant 0$, отрицательная часть состоит из всех $z = a + bi$ таких, что или $a < 0$ или $a = 0$ и $b \leqslant 0$. 2) Отношение двусторонне стабильно; G^+ состоит из всех z таких, что $\arg z \in [\alpha, \beta]$; G^- состоит из всех z таких, что $\pi + \arg z \in [\alpha, \beta]$. 3) Отношение двусторонне стабильно; G^+ состоит из всех $z = a + bi$ таких, что $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; G^- состоит из всех z таких, что $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$. 4) Отношение не является двусторонне стабильным. **8.5.8.** $\tau = \rho_\alpha \cap \rho_\beta \cap \ldots$ **8.5.10.** $\rho = \tau^{-1}$. **8.5.12.** В конечной циклической группе стабильной упорядоченностью

является только диагональ. Пусть $G=[x]_g$ — бесконечная циклическая группа. Пусть $i=1, 2, \ldots$ Обозначим через ρ_i следующее отношение в $G: x^l \sim x^k$ (ρ_i) тогда и только тогда, когда $k-l \geqslant 0$ и делится на i. Каждое из ρ_i и ρ_i^{-1} является стабильной упорядоченностью в G и все стабильные упорядоченности в G исчерпываются отношениями ρ_i, ρ_i^{-1} и диагональю. **8.5.13.** $f_2(x) > f_3(x) > f_1(x) > f_4(x)$. **8.5.15.** Двусторонне стабильна. Упорядоченность будет линейной тогда и только тогда, когда в прямом произведении имеется не более одного неединичного сомножителя G_α. **8.5.16.** Двусторонне стабильная упорядоченность. **8.5.17.** Циклическая группа $[x]$ должна быть бесконечной. **8.5.18.** x имеет бесконечный порядок. **8.5.24.** Все группы, указанные в задаче, являются направленными.

ЛИТЕРАТУРА

Приведем книги на русском языке, которые специально посвящены изложению теории групп и пригодны для первоначального ознакомления.

1. Александров П. С., Введение в теорию групп, Учпедгиз, 1938; изд. 2; Учпедгиз, 1951.
2. Баумгартнер Л., Теория групп, ГТТИ, 1934.
3. Курош А. Г., Теория групп, Гостехиздат, 1944; изд. 2, Гостехиздат, 1953.
4. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.
5. Холл М., Теория групп, ИЛ, 1962.
6. Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, изд. 2, ГТТИ, 1933. (См. также «Избранные труды О. Ю. Шмидта», Математика, М., 1959.)

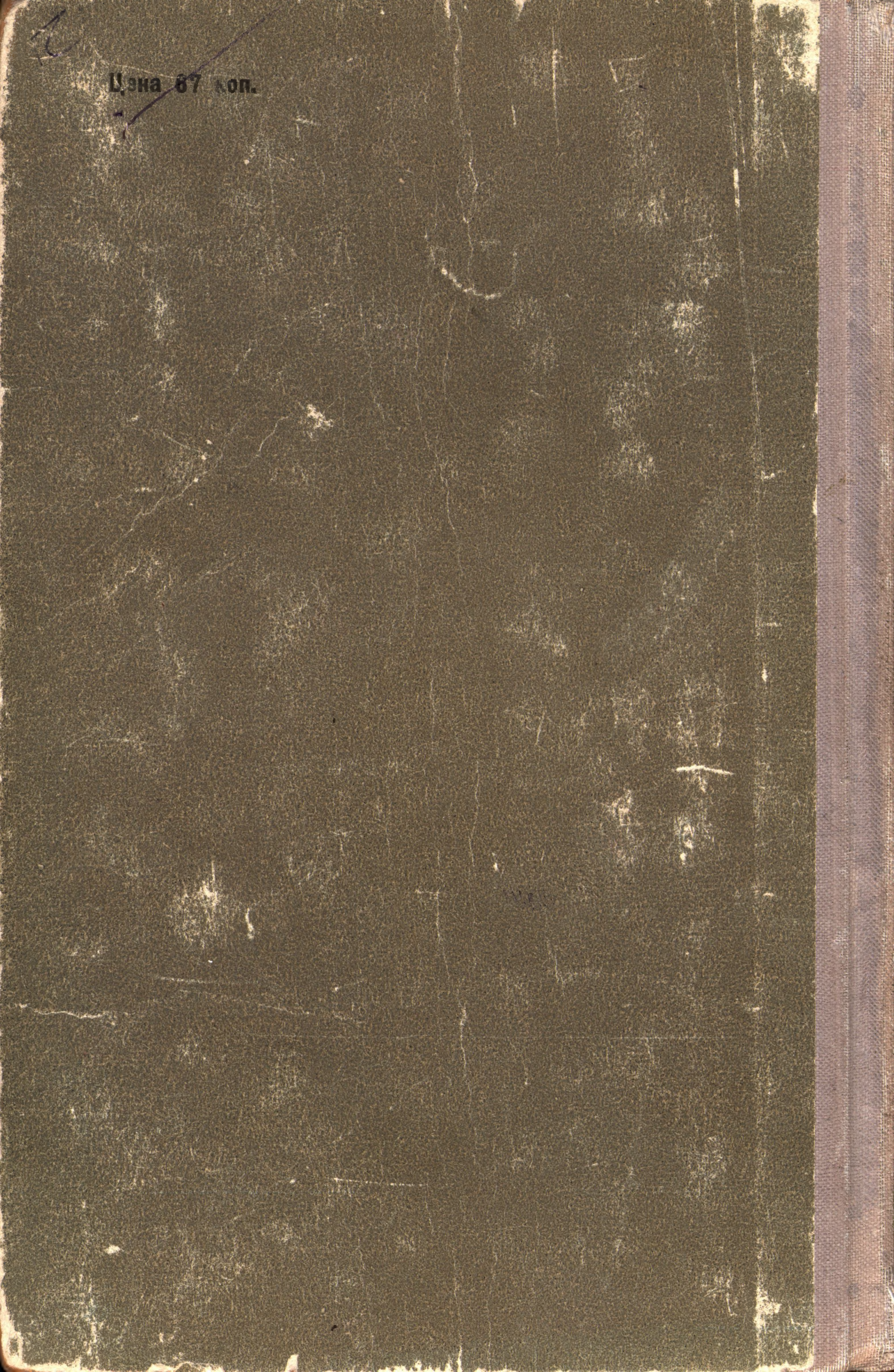
Ниже приводятся некоторые книги, хотя и не специально посвященные теории групп, но в которых имеются главы, знакомящие читателя с первоначальными сведениями из теории групп.

7. Бурбаки Н., Алгебра (Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра), Физматгиз, 1962.
8. Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, Гостехиздат, 1947.
9. Курош А. Г., Высшая алгебра, Физматгиз, 1962.
10. Любарский Г. Я., Теория групп и ее применение к физике, Гостехиздат, 1958.
11. Окунев Л. Я., Основы современной алгебры, Учпедгиз, 1941.
12. Постников М. М., Теория Галуа, Физматгиз, 1963.
13. Проскуряков И. В., Сборник задач по линейной алгебре, Гостехиздат, 1957.
14. Смирнов В. Н., Курс высшей математики, т. III, ч. I, Физматгиз, 1958.
15. Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. I, ГТТИ, 1934.
16. Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, Гостехиздат, 1940.

В настоящей книге рассматриваются и вопросы, не входящие непосредственно в теорию групп. Ниже приводятся некоторые книги, которые помогут читателю познакомиться с этими вопросами.

17. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.
18. Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, 1952.
19. Бурбаки Н., Теория множеств, «Мир», 1965.

20. Бурбаки Н., Общая топология (Основные структуры), Физматгиз, 1958.
21. Вулих Б. З., Введение в функциональный анализ, Физматгиз, 1958.
22. Дьедоне А., Основы современного анализа, «Мир», 1964.
23. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, вып. 1, изд-во МГУ, 1954.
24. Ляпин Е. С., Полугруппы, Физматгиз, 1960.
25. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1956.
26. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1957.
27. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, изд. 2, Гостехиздат, 1954.
28. Шилов Г. Е., Математический анализ (специальный курс), Физматгиз, 1961.


Цэна 67 коп.

Упражнения по теории групп